ĐẠI HỌC DUY TÂN ĐÀ NẴNG

# Xác suất và Thống kê Toán (Nâng Cao)

TS. Trần Nhân Tâm Quyền

ĐÀ NẴNG, MÙA THU NĂM 2013

# CHƯƠNG 1: XÁC XUẤT CỦA BIẾN CỐ

## §1. Biến cố và quan hệ giữa các biến cố

### 1.1. Phép thử và biến cố:

Việc thực hiện một nhóm các điều kiện cơ bản để *quan sát một hiện tượng nào đó* được gọi là một *phép thử* còn hiện tượng có thể xảy ra hay không trong kết quả của phép thử được gọi là *biến cố*.

**Thí dụ:**

1. Tung một con xúc xắc là một phép thử, còn việc lật lên mặt nào đó là biến cố.

2. Bắn một phát súng vào bia thì việc bắn súng là phép thử còn viên đạn trúng bia (hay trượt bia) là biến cố.

3. Từ một lô sản phẩm gồm chính phẩm và phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm, việc lấy sản phẩm là một phép thử; còn lấy được chính phẩm (hay phế phẩm) là biến cố.

*Như vậy ta thấy rằng một biến cố chỉ có thể xảy ra khi một phép thử gắn liền với nó được thực hiện.*

### 1.2. Các loại biến cố:

Trong thực tế ta có thể gặp các loại biến cố sau đây:

**a) Biến cố chắc chắn:**

Là biến cố *nhất định sẽ xảy ra* khi thực hiện phép thử. Biến cố chắc chắn được ký hiệu là $\Omega$.

**Thí dụ:**

1. Khi thực hiện phép thử: tung một con xúc xắc, gọi $\Omega$ là biến cố *xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn hoặc bằng sáu* thì $\Omega$ là biến cố chắc chắn.

2. Gọi $\Omega$ là biến cố *nước sôi ở nhiệt độ* $100^0C$, dưới áp suất 1 atm thì $\Omega$ là một biến cố chắc chắn.

**b) Biến cố không thể có:**

Là biến cố *không thể xảy ra* khi thực hiện phép thử. Biến cố không thể có được ký hiệu là $\varnothing$.

**Thí dụ:**

1. Khi tung một con xúc xắc. Gọi $\varnothing$ là biến cố *xuất hiện mặt 7 chấm*, khi đó $\varnothing$ là biến cố không thể có.

2. Biến cố *nước sôi ở nhiệt độ $50^0C$*, với áp suất 1 atm là biến cố không thể có.

**c) Biến cố ngẫu nhiên:**

Là biến cố *có thể xảy ra hoặc không xảy ra* khi thực hiện phép thử. Các biến cố ngẫu nhiên thường được ký hiệu là A, B, C hoặc là $A_1$, $A_2$, …, $A_{n, \ldots}$

**Thí dụ:**

Khi tung một đồng xu, gọi A là biến cố *xuất hiện mặt Sấp* thì A là biến cố ngẫu nhiên.

Tất cả các biến cố ta gặp trong thực tế đều thuộc một trong ba loại biến cố trên. Tuy nhiên biến cố ngẫu nhiên là loại biến cố thường gặp hơn cả.

**1.3. Mối quan hệ giữa các biến cố:**

**Định nghĩa 1:**

A và B được gọi là hai biến cố tương đương nếu A xảy ra thì B cũng xảy ra và ngược lại. Ký hiệu:

$$A = B$$

**Thí dụ:**

Khi tung một con xúc xắc, gọi A là biến cố *xuất hiện mặt 6 chấm*, B là biến cố *xuất hiện mặt chẵn lớn hơn 4*. Ta thấy nếu A xảy ra thì B cũng xảy ra và ngược lại nếu B xảy ra thì A cũng xảy ra. Vậy A = B.

**Định nghĩa 2:**

Biến cố C được gọi là *tổng của hai biến cố* A và B nếu C xảy khi và chỉ khi **có ít nhất một** trong hai biến cố A, B xảy ra. Ký hệu

$$C = A + B \text{ hoặc } C = A \cup B.$$

**Thí dụ:**

Chọn ngẫu nhiên từ 2 lớp A, B mỗi lớp 1 sinh viên. Gọi A là biến cố *bạn chọn từ lớp A là nam*, B là biến cố *bạn chọn từ lớp B là nam* và C là biến cố *chọn được sinh viên nam*. Rõ ràng biến cố C xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Vậy C = A + B**.**

**Định nghĩa 3:**

Biến cố A được gọi là tổng của n biến cố: $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ nếu A xảy ra khi và chỉ khi **có ít nhất một** trong n biến cố đó xảy ra. Ký hiệu là:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \text{ hoặc } A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

**Định nghĩa 4:**

Biến cố C được gọi là tích của hai biến cố A và B nếu C xảy ra khi và chỉ khi cả A và B *cùng đồng thời xảy ra.* Ký hiệu:

$$C = A.B \text{ hoặc } C = A \cap B.$$

**Thí dụ:**

Hai lớp A, B đều có sinh viên sống tại Đà Nẵng. Chọn ngẫu nhiên mỗi lớp 1 sinh viên. Gọi A là biến cố *chọn được sinh viên sống ở Đà Nẵng ở lớp A*, B là biến cố *chọn được sinh viên sống ở Đà Nẵng ở lớp B*, C là biến cố *cả hai sinh viên sống ở Đà Nẵng*. Rõ ràng C xảy ra khi và chỉ khi cả A và B cùng xảy ra. Vậy C = A.B

**Định nghĩa 5:**

Biến cố A được gọi là tích của n biến cố $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ nếu A xảy ra khi và chỉ khi tất cả n biến cố ấy đồng thời xảy ra. Ký hiệu là:

$$A = A_1.A_2 \ldots A_n \text{ hoặc } A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

**Thí dụ:**

Xét phép thử lấy ngẫu nhiên lần lượt ra 4 con hạc giấy từ hộp có 10 con hạc (trong đó có 4 con hạc màu trắng). Gọi $A_i$ là biến cố *lần thứ i lấy được lấy được hạc trắng* (i = 1,2,3,4). A là biến cố lấy được 4 con hạc trắng. Ta thấy A xảy ra khi và chỉ khi cả 4 biến cố $A_1$, $A_2$, $A_3$ và $A_4$ đồng thời xảy ra. Vậy: $A = A_1.A_2.A_3.A_4$.

**Định nghĩa 6:**

Hai biến cố A và B được gọi là *xung khắc* nhau nếu chúng *không đồng thời xảy ra* trong một phép thử. Nghĩa là

$$A.B=\varnothing$$

với $\varnothing$ là biến cố không thể xảy ra.

**Thí dụ:**

Xét phép chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố *sinh viên được chọn là nam* và B là biến cố *sinh viên được chọn là nữ* thì A và B là hai biến cố xung khắc.

**Định nghĩa 7:**

Nhóm n biến cố $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ được gọi là *xung khắc từng đôi* nếu hai biến cố bất kỳ trong n biến cố này xung khắc với nhau. Nghĩa là

$$A_i.A_j=\varnothing,\ \forall i\neq j.$$

**Thí dụ:**

Trong một thùng hàng có 3 sản phẩm loại I, 4 sản phẩm loại II và 5 sản phẩm loại III. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ thùng hàng. Gọi A là biến cố *lấy được 2 sản phẩm loại I*, B là biến cố *lấy được 2 sản phẩm loại II*, C là biến cố *lấy được 2 sản phẩm khác loại*. Khi đó A, B, C là 3 biến cố xung khắc từng đôi.

**Định nghĩa 8:**

Các biến cố $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ được gọi là *nhóm biến cố đầy đủ* nếu chúng xung khắc từng đôi và tổng của chúng là biến cố chắc chắn. Nghĩa là

$A_i.A_j=\varnothing,\ \forall i\neq j,$

$A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$

**Thí dụ:**

Xét phép thử tung một con xúc xắc. Gọi $A_i$ (i = 1,…,6) là biến cố *xuất hiện mặt i chấm.* Các biến cố $A_1$, $A_2$, …, $A_6$ tạo nên một nhóm các biến cố đầy đủ vì chúng xung khắc từng đôi một và tổng của 6 biến cố đó là biến cố chắc chắn $A_1+A_2+\ldots+A_6=\Omega$.

**Định nghĩa 9:**

Biến cố A và B gọi là hai biến cố *đối lập* nhau (hay *phủ định* nhau) nếu chúng tạo nên một nhóm biến cố đầy đủ.

Biến cố đối lập của biến cố A được ký hiệu là $\overline{A}$. Vậy A và $\overline{A}$ lập thành một nhóm đầy đủ các biến cố.

**Thí dụ:**

Khi tung một con xúc xắc. Gọi A là biến cố *xuất hiện mặt chẵn*, B là biến cố *xuất hiện mặt lẻ*. Rõ ràng B là biến cố đối lập của biến cố A hay $B = \overline{A}$.

**Luật Demorgan:**

$$\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A_1}.\overline{A_2}\ldots\overline{A_n},$$
$$\overline{A_1.A_2\ldots A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_n}.$$

**Nhận xét:**

A+B = B+A;  A.B = B.A

A+A = A; A.A = A

A.(B + C) = A.B + A.C

A+$\varnothing$ = A;  A.$\varnothing$ = $\varnothing$

A+$\Omega$ = $\Omega$; A.$\Omega$ = A

$A + \overline{A} = \Omega$;  $A.\overline{A} = \varnothing$

## §2. Định nghĩa cổ điển về xác suất

Quan sát các hiện tượng tự nhiên ta thấy có những hiện tượng thường xảy ra, có những hiện tượng ít xảy ra. Xác suất là một đại lượng thể hiện mức độ xảy ra (thường xuyên hay ít khi) của một biến cố. Trong lịch sử Toán học đã có nhiều định nghĩa cho khái niệm xác suất. Trong phần này, ta sẽ xem xét một số định nghĩa tiêu biểu.

### 2.1. Định nghĩa xác suất cổ điển

#### a) Định nghĩa

Xác suất xuất hiện biến cố A là *tỷ số giữa số các trường hợp thuận lợi để biến cố A xảy ra và số trường hợp cùng khả năng có thể xảy ra* khi thực hiện phép thử.

Nếu ký hiệu P(A) là xác suất của biến cố A, m là số trường hợp thuận lợi cho biến cố A, n là số trường hợp cùng khả năng có thể xảy ra thì ta có công thức:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

**Thí dụ 1**:

Từ 1 lô hàng có 13 chính phẩm và 7 phế phẩm có kích thước và hình dạng như nhau, lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm.

Gọi A là biến cố *lấy được chính phẩm*, ta có

$$P(A) = \frac{13}{20}.$$

Gọi B là biến cố *lấy được phế phẩm*, ta có

$$P(B) = \frac{7}{20}.$$

**Thí dụ 2**:

Một bộ bài có 52 quân, rút hú họa 3 quân. Tìm xác suất để trong 3 quân rút ra có duy nhất một quân Cơ.

Giải: Mỗi cách rút 3 quân từ 52 quân là một tổ hợp chập 3 từ 52 phần tử, do đó số *trường hợp cùng khả năng xảy ra* là:

$$n = C_{52}^{3}.$$

Gọi A là biến cố *xảy ra một quân Cơ và 2 quân còn lại không là quân Cơ khi rút 3 quân*. Số trường hợp thuận lợi cho A xảy ra là:

$$m = C_{13}^{1} C_{39}^{2}.$$

Vậy

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{13}^{1} C_{39}^{2}}{C_{52}^{3}} = \frac{13.\frac{38.39}{2}}{\frac{50.51.52}{6}} = 0,4359.$$

**Thí dụ 3**:

Một lô hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 8 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từ lô sản phẩm đó 3 sản phẩm. Tìm xác suất để:

a) Cả 3 sản phẩm lấy ra đều là chính phẩm.

b) Trong 3 sản phẩm lấy ra có 2 chính phẩm.

Giải: Gọi A là biến cố *lấy được 3 chính phẩm*. Số kết quả cùng khả năng xảy ra trong phép thử là:

$$n = C_{10}^{3} = 120.$$

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A xảy ra là

$$m_A = C_8^3 = 56.$$

Do đó

$$P(A) = \frac{56}{120} = 0,4667.$$

Gọi B là biến cố *trong ba sản phẩm lấy ra có 2 chính phẩm*. Số kết quả thuận lợi cho B xảy ra là:

$$m_B = C_8^2 C_2^1 = 56.$$

Do đó

$$P(B) = \frac{56}{120} = 0,4667.$$

**Thí dụ 4:**

Một lô hàng 12 sản phẩm trong đó có 3 sản phẩm bị hỏng. Chia ngẫu nhiên 12 sản phẩm đó cho 3 khách hàng, mỗi khách hàng 4 sản phẩm. Tính xác suất của các biến cố:

i/ Mỗi người đều có một sản phẩm bị hỏng.

ii/ Có một người có đúng 2 sản phẩm bị hỏng.

Giải: Số kết quả đồng khả năng xảy ra trong việc chia 12 sản phẩm cho 3 khách hàng (lấy ngẫu nhiên 4 sản phẩm trong 12 sản phẩm chia cho người thứ nhất, lấy ngẫu nhiên 4 sản phẩm trong 8 sản phẩm còn lại chia cho người thứ hai, và lấy 4 sản phẩm còn lại chia cho người thứ ba)

$$n = C_{12}^4 . C_8^4 . C_4^4 .$$

i/ Gọi A là biến cố *mỗi người đều có một sản phẩm bị hỏng*. Khi đó số kết quả thuận lợi cho A là

$$m_A = (C_9^3 C_3^1).(C_6^3 C_2^1).(C_3^3 C_1^1).$$

Vậy

$$P(A) = \frac{C_9^3 C_3^1 C_6^3 C_2^1 C_3^3 C_1^1}{C_{12}^4.C_8^4.C_4^4} = \frac{16}{56}.$$

i/ Gọi B là biến cố *có một người có đúng 2 sản phẩm bị hỏng*. Khi đó số kết quả thuận lợi cho B là

$$m_B = C_3^1(C_9^2 C_3^2).(C_8^4).(C_4^4).$$

Vậy

$$P(A) = \frac{C_3^1 C_9^2 C_3^2 C_8^4 C_4^4}{C_{12}^4.C_8^4.C_4^4} = \frac{36}{56}.$$

**2.2. Định nghĩa thống kê về xác suất**

**a) Định nghĩa tần suất:**

Tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử là tỷ số giữa số phép thử mà trong đó biến cố A xuất hiện và tổng số phép thử được thực hiện. Nếu ký hiệu số phép thử là n, số lần xuất hiện biến cố A là k, tần suất xuất hiện biến cố A là

$$f(A) = \frac{k}{n}.$$

Cùng với khái niệm xác suất, khái niệm tần suất là một trong những khái niệm cơ bản của lý thuyết xác suất.

**Thí dụ 1**:

Khi khảo sát ngẫu nhiên 40 sinh viên người ta phát hiện ra 5 sinh viên giỏi. Nếu gọi A là biến cố *xuất hiện sinh viên giỏi* thì tần suất xuất hiện sinh viên giỏi trong số 40 SV được khảo sát là:

$$f(A) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

**Thí dụ 2:**

Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu, người ta tiến hành tung đồng xu nhiều lần và thu được kết quả cho ở bảng dưới đây:

| Người tiến hành thử | Số lần tung (n) | Số lần được mặt sấp xuất hiện (k) | Tần suất f(A) |
|---|---|---|---|
| Thùy Nhiên | 5268 | 2671 | 0,50702 |
| Nhất Tâm | 14400 | 7021 | 0,50146 |
| Thiên Hương | 20045 | 10033 | 0,50052 |

Từ kết quả các lần thử trên ta thấy khi số phép thử tăng lên, tần suất xuất hiện mặt sấp tiến dần đến 0,5 là xác suất xuất hiện mặt sấp khi tung đồng xu. Vậy tần suất tiến dần đến xác suất khi số phép thử tăng dần đến vô hạn. Từ đó ta có định nghĩa thống kê về xác suất:

**b) Định nghĩa xác suất theo tần xuất**

Khi số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất xuất hiện biến cố tiến dần đến một số xác định được gọi là xác suất của biến cố đó. Hay nói cách khác, xác suất là giới hạn của tần suất khi số phép thử tăng lên vô hạn:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n}.$$

Định nghĩa thống kê về xác suất có ưu điểm lớn là nó không đòi hỏi những điều kiện áp dụng như đối với những định nghĩa cổ điển. Nó hoàn toàn dựa trên các quan sát thực tế để làm cơ sở kết luận về xác suất xảy ra của một biến cố.

Tuy nhiên trong thực tế không thể tiến hành vô hạn phép thử, nhưng đối với số phép thử đủ lớn ta có thể xem xác suất xấp xỉ bằng tần suất:

$$P(A) \simeq \frac{k}{n}.$$

**2.3. Định nghĩa xác suất theo hình học:**

Khi số kết quả trong phép thử là vô hạn, ta không thể áp dụng định nghĩa cổ điển để tính xác suất. Trong nhiều trường hợp, ta có thể sử dụng định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học như sau:

**a) Định nghĩa:**

Giả sử một điểm được rơi ngẫu nhiên vào một miền $\Omega$, A là một miền con của $\Omega$. Khi đó xác suất để điểm rơi ngẫu nhiên vào miền A được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}.$$

Trong đó mes(A) và mes($\Omega$) là độ đo của miền A và $\Omega$ (có thể là độ dài, diện tích hay thể tích tùy thuộc vào miền xét trên đường thẳng, mặt phẳng hay trong không gian 3 chiều theo từng bài toán cụ thể).

**Thí dụ:**

Hai người bạn hẹn gặp nhau tại một địa điểm đã định trước trong khoảng thời gian từ 19 đến 20 giờ. Hai người đến chổ hẹn độc lập với nhau và qui ước rằng người đến trước sẽ chỉ đợi người đến sau 10 phút, nếu không gặp thì sẽ đi. Tính xác suất để hai người có thể gặp nhau?

Giải: Gọi A là biến cố *hai người gặp nhau*. Ta cần tính P(A).

Gọi x là số phút tại thời điểm người thứ nhất đến điểm hẹn: $0 \le x \le 60$.

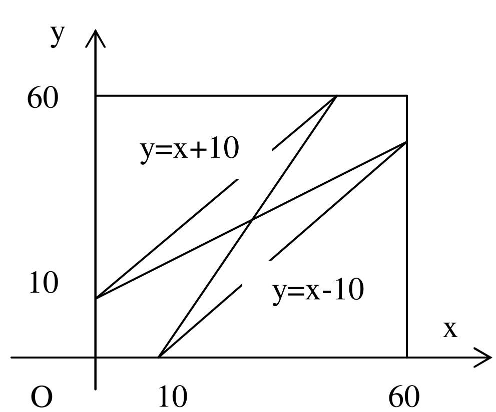
Gọi y là số phút tại thời điểm người thứ hai đến điểm hẹn: $0 \le y \le 60$.

Nếu ta biểu diễn số phút x theo trục hoành và số phút y theo trục tung thì số phút lúc đến của cả hai người được biểu diễn bằng một điểm có tọa độ (x, y) nằm trong hình vuông có cạnh là 60 (ta lấy phút làm đơn vị). Đó chính là miền $\Omega$.

$$\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 60; 0 \le y \le 60\}$$

Để hai người gặp nhau thì số phút lúc đến x, y của mỗi người phải thỏa mãn điều kiện:

$$|x - y| \le 10 \Leftrightarrow x - 10 \le y \le x + 10.$$



Như vậy các điểm (x, y) thích hợp cho việc gặp nhau là các điểm nằm trong phần A có gạch chéo nằm giữa hai đường thẳng y = x – 10 và y = x + 10 (như hình vẽ). Theo công thức xác suất hình học:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = \frac{11}{36} = 0,3056.$$

Từ định nghĩa xác suất theo hình học, ta thấy rằng một biến cố có xác suất bằng 0 vẫn có thể xảy ra. Chẳng hạn, xác suất để một viên đạn rơi trúng một điểm M trên một miền $\Omega$ bằng không (vì diện tích mes($\Omega$) bằng diện tích một điểm M, bằng 0), nhưng biến cố đó vẫn có thể xảy ra.



**2.4 Các tính chất của xác suất:**

Từ các định nghĩa của xác suất đã nêu trên ta có thể suy ra các tình chất của xác suất:

1. Nếu $A \subset B$ thì

$$P(A) \le P(B);\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

2. Nếu A là biến cố bất kỳ thì:

$$0 \le P(A) \le 1$$

3. Xác suất của biến cố chắc chắn bằng một:

$$P(\Omega) = 1$$

4. Xác suất của biến cố không thể có bằng không:

$$P(\varnothing) = 0$$

5. Nếu $\overline{A}$ là biến cố phủ định (đối lập) của biến cố A thì:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

6. Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Nếu A, B, C là ba biến cố xung khắc từng đôi thì

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

7. Nếu A, B là 2 biến cố bất kỳ thì:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$$

Tổng quát, nếu A, B, C là 3 biến cố bất kỳ thì:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A.B) - P(B.C) - P(C.A) + P(A.B.C).$$

## §3. Xác suất có điều kiện

### 3.1. Định nghĩa:

Xác suất của biến cố A nếu biến cố B *đã xảy ra* được gọi là xác suất có điều kiện của A đối với B. Ký hiệu là

$$P(A/B).$$

**Thí dụ:**

Cho một hộp kín có 6 thẻ ATM của ACB và 4 thẻ ATM của Vietcombank. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại 2 thẻ. Tìm xác suất để lần thứ hai lấy được thẻ ATM của Vietcombank nếu biết lần thứ nhất đã lấy được thẻ ATM của ACB.

Giải: Gọi A là biến cố *lần thứ hai lấy được thẻ ATM Vietcombank,* B là biến cố *lần thứ nhất lấy được thẻ ATM của ACB*. Ta cần tìm P(A/B).

Sau khi lấy lần thứ nhất (biến cố B đã xảy ra) trong hộp còn lại 9 thẻ, trong đó 4 thẻ Vietcombank. Vậy

$$P(A/B) = \frac{4}{9}.$$

### 3.2. Công thức nhân xác suất

**a) Công thức:**

Xác suất của tích hai biến cố A và B bằng tích xác suất của một trong hai biến cố đó với xác suất có điều kiện của biến cố còn lại:

$$P(A.B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B).$$

Chứng minh: Giả sử phép thử có n kết quả cùng khả năng có thể xảy ra, $m_A$ kết quả thuận lợi cho A, $m_B$ kết quả thuận lợi cho B. Vì A và B là hai biến cố bất kỳ, do đó nói chung sẽ có k kết quả thuận lợi cho cả A và B cùng đồng thời xảy ra. Theo định nghĩa cổ điển của xác suất ta có:

$$P(A.B)=\frac{k}{n},\ P(A)=\frac{m_A}{n}.$$

Ta đi tính P(B/A). Với điều kiện biến cố A đã xảy ra, nên số kết quả cùng khả năng của phép thử đối với biến B là $m_A$, số kết quả thuận lợi cho B là k. Do đó:

$$P(B/A)=\frac{k}{m_A}.$$

Như vậy:

$$P(AB)=\frac{k}{n}=\frac{m_A}{n}.\frac{k}{m_A}=P(A).P(B/A).$$

Vì vai trò của hai biến cố A và B như nhau. Bằng cách chứng minh tương tự ta cũng được $P(A.B)=P(B).P(A/B).$

**Thí dụ:**

1. Trong hộp có 20 nắp khoen bia Tiger, trong đó có 2 nắp ghi *Chúc mừng bạn đã trúng thưởng xe BMW*. Bạn được chọn lên rút thăm lần lượt hai nắp khoen, tính xác suất để cả hai nắp đều trúng thưởng.

Giải: Gọi A là biến cố *rút nắp khoen đầu trúng thưởng*. B là biến cố *rút nắp khoen thứ hai trúng thưởng*. C là biến cố cả 2 nắp đều trúng thưởng. Ta có C = A.B và cần tính P(C).

Khi bạn rút thăm lần đầu thì trong hộp có 20 nắp trong đó có 2 nắp trúng. Do đó P(A) = 2/20.

Khi biến cố A đã xảy ra thì còn lại 19 nắp trong đó có 1 nắp trúng thưởng. Do đó: P(B/A) = 1/19. Từ đó ta có:

$$P(C)=P(A).P(B/A)=\frac{2}{20}.\frac{1}{19}=0.0053.$$

2. Áo Việt Tiến trước khi xuất khẩu sang Mỹ phải qua 2 lần kiểm tra, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất, và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra đầu sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tìm xác suất để 1 chiếc áo đủ tiêu chuẩn xuất khẩu?

**Giải:**

Gọi A là biến cố *sản phẩm qua được lần kiểm tra đầu tiên*, B là biên cố *sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ 2*, C là biến cố *đủ tiêu chuẩn xuất khẩu*. Khi đó

$$P(C) = P(A.B) = P(A).P(B/A) = 0,98.0,95 = 0,931.$$

3. Lớp Kinh tế học có 95 Sinh viên, trong đó có 40 nam và 55 nữ. Trong kỳ thi môn Xác suất thống kê có 23 sinh viên đạt điểm giỏi (trong đó có 12 nam và 11 nữ). Gọi tên ngẫu nhiên một sinh viên trong danh sách lớp. Tìm xác suất gọi được sinh viên đạt điểm giỏi môn Xác suất thống kê, biết rằng sinh viên đó là nữ?

Giải: Gọi A là biến cố *gọi được sinh viên nữ*, B là biến cố *gọi được sinh viên đạt điểm giỏi môn Xác suất thống kê*, C là biến cố *gọi được sinh viên nữ đạt điểm giỏi*. Khi đó C = B/A. Do đó

$$P(C) = P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{11}{95}}{\frac{55}{95}} = \frac{11}{55} = 0,2.$$

**b) Các định nghĩa về các biến cố độc lập:**

**Định nghĩa 1:**

Hai biến cố gọi là độc lập nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không làm thay đổi xác suất xảy ra của biến cố kia và ngược lại.

Ta có thể dùng khái niệm xác suất có điều kiện để định nghĩa các biến cố độc lập như sau:

Nếu

$$P(A/B) = P(A) \text{ và } P(B/A) = P(B)$$

thì A và B độc lập với nhau.

Trong trường hợp việc biến cố này xảy ra hay không xảy ra làm cho xác suất xảy ra của biến cố kia thay đổi thì hai biến cố đó gọi là phụ thuộc nhau.

**Thí dụ**:

Trong bình có 4 quả cầu trắng và 5 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên từ bình ra 1 quả cầu. Gọi A là biến cố *lấy được quả cầu xanh*. Hiển nhiên P(A) = 5/9 . Quả cầu lấy ra được bỏ lại vào bình và tiếp tục lấy 1 quả cầu. Gọi B là biến cố *lần thứ 2 lấy được quả cầu xanh*, P(B) = 5/9. Rõ ràng xác suất của biến cố B không thay đổi khi biến cố A xảy ra hay không xảy ra và ngược lại. Vậy hai biến cố A và B độc lập nhau.

Ta chú ý rằng nếu A và B độc lập thì các cặp biến cố

$$A, \overline{B} \text{ hoặc } \overline{A}, B \text{ hoặc } \overline{A}, \overline{B}$$

cũng độc lập với nhau.

*Trong thực tế việc nhận biết tính độc lập, phụ thuộc, xung khắc của các biến cố chủ yếu dựa vào trực giác.*

**Định nghĩa 2:** Các biến cố $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, được gọi là độc lập từng đôi nếu mỗi cặp hai biến cố bất kỳ trong n biến cố đó độc lập với nhau.

**Thí dụ**:

Xét phép thử tung một đồng xu 3 lần. Gọi $A_i$ là biến cố được mặt sấp ở lần tung thứ i (i = 1, 2, 3). Rõ ràng mỗi cặp hai trong 3 biến cố đó độc lập với nhau. Vậy $A_1$, $A_2$, $A_3$ độc lập từng đôi.

**Định nghĩa 3**: Các biến cố $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, được gọi là độc lập toàn phần (toàn bộ) nếu mỗi biến cố độc lập với tích của một tổng hợp bất kỳ trong các biến cố còn lại.

*Ta chú ý là các biến cố độc lập từng đội thì chưa chắc độc lập toàn phần. Điều kiện độc lập toàn phần mạnh hơn độc lập từng đôi.*

**c) Hệ quả:**

Từ định lý trên ta có thể suy ra một số hệ quả sau đây:

**Hệ quả 1:**

Xác suất của tích hai biến cố độc lập bằng tích xác suất của các biến cố đó:

$$P(A.B) = P(A).P(B).$$

**Hệ quả 2**:

Xác suất của tích n biến cố bằng tích xác suất của các biến cố đó, trong đó xác suất của mỗi biến cố tiếp sau đều được tính với điều kiện tấc cả các biến cố trước đó đã xảy ra:

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1...A_{n-1}).$$

**Hệ quả 3**:

Xác suất của tích n biến cố độc lập toàn phần bằng tích xác suất của các biến cố đó:

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)...P(A_n).$$

**Thí dụ:**

Tỷ lệ phế phẩm của một máy là 20%. Vậy phải cho máy đó sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để với khả năng lên đến 95% là sẽ có ít nhất một chính phẩm.

Giải: Giả sử phải sản xuất n sản phẩm. Gọi $A_i$ (i = 1,2,…,n) là biến cố *sản phẩm thứ i là chính phẩm*. Gọi A là biến cố *trong n sản phẩm đó có ít nhất một chính phẩm*. Khi đó

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Do các biến cố trên là độc lập toàn phần và theo luật Dermorgan ta có

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - P\left(\prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - (0,2)^n .$$

Ta có

$$\begin{aligned} P(A) \geq 0,95 &\Rightarrow 1 - (0,2)^n \geq 0,95 \\ &\Rightarrow (0,2)^n \leq 0,05 \\ &\Rightarrow n\log_{10}(0,2) \leq \log_{10}(0,05) \\ &\Rightarrow n \geq \frac{\log_{10}(0,05)}{\log_{10}(0,2)} = 1,86 \\ &\Rightarrow n = 2. \end{aligned}$$

Vậy phải cho máy đó sản xuất ít nhất 2 sản phẩm để thỏa yêu cầu.

### 3.3. Các công thức xác suất

#### a) Hệ đầy đủ các biến cố

Cho một phép thử. Ta nói hệ gồm n biến cố $H_1, H_2, \ldots, H_n$ của phép thử là đầy đủ nếu

i) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ xung khắc từng đôi

ii) $H_1+H_2+\ldots+H_n = \Omega$.

**Thí dụ:**

1. Cho một phép thử bất kỳ. Khi đó hệ $A, \overline{A}$ là đầy đủ.

2. Một lô hàng có 8 sản phẩm loại I và 6 sản phẩm loại II. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô hàng. Khi đó hệ 3 biến cố sau là đầy đủ:

$H_1$ = Biến cố *chọn được 2 sản phẩm loại I*,

$H_2$ = Biến cố *chọn được 2 sản phẩm loại II*,

$H_3$ = Biến cố *chọn được 1 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II*.

**Chú ý:** Nếu $H_1, H_2, \ldots, H_n$ là hệ đầy đủ các biến cố thì

$$P(H_1) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

**b) Các công thức xác suất**

Cho một phép thử có $H_1, H_2, \ldots, H_n$ là hệ các biến cố đầy đủ và A là biến cố bất kỳ của phép thử. Khi đó

i/ Công thức xác suất đầy đủ (hay công thức xác suất toàn phần)

$$P(A) = P(H_1).P(A/H_1) + P(H_2).P(A/H_2) + \ldots + P(H_n).P(A/H_n).$$

ii/ Công thức Bayès (Bây-ét)

$$P(H_j / A) = \frac{P(H_j).P(A / H_j)}{P(A)}, \ \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

**Thí dụ 1:**

Một cửa hàng bán một loại sản phẩm do hai công ty A và B cung cấp với tỷ lệ sản phẩm của công ty A và B có trong của hàng tương ứng là 55% và 45%. Theo thống kê tỷ lệ phế phẩm của công ty A và B tương ứng là 2% và 3%. Một khách hàng đến mua ngẫu nhiên 1 sản phẩm của của hàng.

a/ Tìm xác suất để khách mua được chính phẩm.

b/ Giả sử sản phẩm khách mua là phế phẩm. Khi đó khả năng phế phẩm này do công ty nào cung cấp là cao hơn.

Giải: Gọi $H_1$ là biến cố *sản phẩm khách mua do công ty A cung cấp* và $H_2$ là biến cố *sản phẩm khách mua do công ty B cung cấp*. Khi đó $H_1$ và $H_2$ là hệ đầy đủ và $P(H_1) = 0,55$; $P(H_2) = 0,45$.

a/ Gọi X là biến cố *khách mua được chính phẩm*. Ta có

$$P(X) = P(H_1).P(X/H_1) + P(H_2).P(X/H_2)$$

$$= 0,55.\ 0,98 + 0,45.\ 0,97 = 0,9755.$$

b/ Ta có

$P(H_1/\overline{X})$ = Xác suất để phế phẩm khách mua do công ty A cung cấp

$$= \frac{P(H_1).P(\overline{X}/H_1)}{P(\overline{X})} = \frac{0,55.0,02}{1-0,9755} = 0,4489$$

$P(H_2/\overline{X})$ = Xác suất để phế phẩm khách mua do công ty B cung cấp

= 1- $P(H_1/\overline{X})$ = 0,5511.

Vậy khả năng phế phẩm khách mua do công ty B cung cấp là cao hơn.

**Thí dụ 2:**

Xí nghiệp có hai dây chuyền cùng lắp ráp một loại sản phẩm với tỷ lệ phế phẩm tương ứng là 2% và 3%. Một khách hàng mua (lần lượt) 2 sản phẩm của xí nghiệp đó. Tìm xác suất để khách hàng mua được:

a/ 2 chính phẩm

b/ 1 chính phẩm.

Giải: Gọi $H_1$ là biến cố *khách mua được 2 sản phẩm của dây chuyền 1*; $H_2$ là biến cố *khách mua được 2 sản phẩm của dây chuyền 2* và $H_3$ là biến cố *khách mua được 1 sản phẩm của dây chuyền 1 và 1 sản phẩm của dây chuyền 2*. Khi đó hệ $H_1$, $H_2$, $H_3$ là đầy đủ và $P(H_1) = 1/4$, $P(H_2) = 1/4$, $P(H_3) = 1/2$

a/ Gọi A là biến cố *khách mua được 2 chính phẩm*.

$$P(A) = P(H_1).P(A/H_1) + P(H_2).P(A/H_2) + P(H_3).P(A/H_3).$$

$$= (1/4).\ 0,98.\ 0.98 + (1/4).0,97.0,97 + (1/2).0,98.0,97 = 0,951.$$

b/ Gọi B là biến cố *khách mua được 1chính phẩm và 1 phế phẩm*.

$$P(B) = P(H_1).P(B/H_1) + P(H_2).P(B/H_2) + P(H_3).P(B/H_3).$$

$$= (1/4).\ 2.\ 0,98.\ 0.02 + (1/4).2.\ 0,97.0,03$$

$$+ (1/2).\ (0,98.0,03 + 0,02.0,97)$$

$$= 0,04875.$$

**b) Các công Bernoulli**

Cho một phép thử và A là biến cố nào đó của phép thử. Giả sử ta thực hiện phép thử này n lần một cách độc lập thì ta được một dãy n phép thử độc lập.

Nếu P(A) = p *không thay đổi* trong mỗi lần thực hiện phép thử thì dãy n phép thử đó gọi là một lược đồ Bernoulli.

Ký hiệu: B(n,p).

**Kết quả:** Cho lược đồ Bernoulli B(n,p). Xác suất để trong n lần thực hiện phép thử kể trên biến cố A xảy ra *đúng* k lần là:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

**Thí dụ 1:**

Một công nhân quản lý 6 máy dệt độc lập nhau. Xác suất để trong khoảng thời gian T mỗi máy dệt cần sự chăm sóc của công nhân đó là 0,3. Tìm xác suất để trong thời gian T:

a/ Có đúng 4 máy cần chăm sóc.

b/ Có ít nhất 4 máy cần chăm sóc.

Giải: Bài toán thỏa mãn lược đồ Bernoulli B(n, p) với n = 6 và p = 0,3. Ở đây, trong khoảng thời gian T, mỗi máy dệt cần sự chăm sóc của cô công nhân hay không là một phép thử và có 6 máy dệt như thế tức là có 6 phép thử; ngoài ra xác suất cần sự chăm sóc của mỗi máy dệt là không đổi và bằng 0,3.

a/ Ta cần tính $P_6(4) = C_6^4 (0,3)^4 (1-0,3)^{6-4} = 0,05954$

b/ Ta cần tính $P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$ với:

$$P_6(4) = 0,05954,\ P_6(5) = C_6^5 (0,3)^5 (1-0,3)^{6-5},\ P_6(6) = C_6^6 (0,3)^6 (1-0,3)^{6-6},$$

và do đó $P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = 0,0705$.

**Thí dụ 2:**

Thống kê cho biết xác suất để xạ thủ bắn trúng mục tiêu là 0,4. Với xác suất không nhỏ hơn 0,9 xạ thủ ấy cần bắn ít nhất bao nhiêu lần để có ít nhất một lần trúng mục tiêu.

Giải: Gọi n là số lần ít nhất xạ thủ bắn để thỏa mãn bài toán. Ta cần tìm n. Gọi A là biến cố *trong n lần bắn có ít nhất một lần trúng mục tiêu*. Khi đó $\overline{A}$ là biến cố *trong n lần bắn không có lần nào trúng mục tiêu*. Ta có