

Áp dụng cho hệ: Đại học chính quy
Người ra đề: Bộ môn Toán
Ngày ra đề:
Ngày chọn đề:

Thời gian làm bài: 90 phút
Người duyệt đề:
Đại diện Phòng Đào tạo:
Đề số: 01

Câu 1 (2 điểm).

Một tờ tiền giả lần lượt bị hai người A và B kiểm tra. Xác suất để người A phát hiện ra tờ này giả là $0,7$. Nếu người A cho rằng tờ này tiền giả, thì xác suất để người B cũng nhận định như thế là $0,8$. Ngược lại, nếu người A cho rằng tờ này là tiền thật thì xác suất để người B cũng nhận định như thế là $0,4$.

- Tính xác suất để ít nhất một trong hai người này phát hiện ra tờ tiền đó là giả;
- Biết tờ tiền đó đã bị ít nhất một trong hai người này phát hiện là giả, tính xác suất để A phát hiện ra nó giả.

Câu 2 (2 điểm).

Một cửa hàng mua vào 4 thùng hàng với giá 120 nghìn đồng/thùng. Số thùng hàng chưa bán được, khi hết hạn sử dụng được nhà phân phối mua lại với số tiền bằng $\frac{3}{4}$ số tiền cửa hàng đã mua vào. Kí hiệu X là số thùng hàng bán được của cửa hàng. X có phân phối xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$

- Tìm số thùng hàng bán được có khả năng nhất;
- Nếu giá bán ra của mỗi thùng hàng trên như nhau, thì giá đó là bao nhiêu để lợi nhuận kì vọng đối với 4 thùng này là 40 nghìn đồng/thùng.

Câu 3 (1 điểm).

Trong 60 cây vàng có 3 cây không đạt tiêu chuẩn. Từ đó rút ngẫu nhiên đồng thời 10 cây để kiểm tra. Tìm trung bình số cây không đạt tiêu chuẩn trong 10 cây này.

Câu 4 (5 điểm).

Toàn thành phố A có 500 000 hộ gia đình. Một công ti tiến hành khảo sát nhu cầu về một loại sản phẩm do công ti sản xuất trên 500 hộ gia đình ở thành phố A , được bảng số liệu:

Số lượng(kg/tháng)	0	(2; 3]	(3; 4]	(4; 5]	(5; 6]	(6; 7]	(7; 8]
Số hộ	150	33	52	127	73	35	30

- Với độ tin cậy 94%, hãy tìm khoảng tin cậy đối xứng của nhu cầu trung bình trong 1 tháng của **toàn thành phố** về loại sản phẩm này;
- Với độ tin cậy 95%, hãy tìm khoảng tin cậy đối xứng của mức tiêu thụ trung bình trong 1 tháng trên mỗi hộ ở **các hộ có nhu cầu sử dụng**;
- Những hộ có mức tiêu thụ trên 5kg/tháng gọi là những hộ có nhu cầu sử dụng cao. Nếu muốn ước lượng tỉ lệ hộ có nhu cầu sử dụng cao với độ chính xác 0,04 và độ tin cậy 98% thì phải điều tra thêm bao nhiêu hộ nữa?
- Một tài liệu cũ nói rằng: tỉ lệ hộ có nhu cầu sử dụng loại sản phẩm này là 80%. Hãy cho nhận xét về tình hình tiêu thụ loại sản phẩm này tại thành phố A trong thời gian gần đây, với mức ý nghĩa 2%.
- Một tài liệu cho rằng: mức tiêu thụ trung bình trong 1 tháng của loại sản phẩm này ở thành phố A là 1 600 000 kg thì có chấp nhận được không, với mức ý nghĩa 5%?

Cho biết: $u_{0,03} \approx 1,88$; $u_{0,025} \approx 1,96$; $u_{0,02} \approx 2,05$; $u_{0,01} \approx 2,33$; $u_{0,05} \approx 1,645$.

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 1

Câu 1 (1+1 điểm).

$H :=$ “Người A nhận định đúng tờ đó giả”, $K :=$ “Người B nhận định đúng tờ đó giả”,

$L :=$ “Ít nhất một trong hai người A hoặc B nhận định đúng tờ đó giả”.

a) $P(L) = P(H \cup K) = 1 - P(\overline{H \cup K}) = 1 - P(\overline{H} \overline{K})$
 $= 1 - P(\overline{H})P(\overline{K}|\overline{H}) = 1 - [1 - P(H)]P(\overline{K}|\overline{H}) = 1 - 0,3 \cdot 0,4 = \mathbf{0,88}$.

b) Theo Công thức Xác suất đầy đủ

$$P(H|L) = \frac{P(H)P(L|H)}{P(L)} = \frac{0,7 \cdot 1}{0,88} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{44}}$$

Câu 2 (1+1 điểm).

a) $\text{mod}(X) = \mathbf{3}$ vì $P\{X = 3\} = \max_{i=0,4} P\{X = i\}$.

b) $T :=$ Giá bán ra của mỗi thùng (đơn vị: nghìn đồng).

Mỗi thùng hết hạn sử dụng bị lỗ $120 \times \frac{1}{4} = 30$ nghìn đồng.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{2}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{6}{15} + 4 \times \frac{4}{15} = \frac{40}{15}$$

Lợi nhuận thu được đối với 4 thùng là $(T - 120)X - (4 - X)30 = (T - 90)X - 120$.

Lợi nhuận trung bình thu được đối với 4 thùng hàng là $4 \times 40 = 160$ nghìn đồng.

$$160 = E((T - 90)X - 120) = (T - 90)EX - 120 = \frac{(T-90)40}{15} - 120 \Rightarrow T = \mathbf{195} \text{ (nghìn đồng)}.$$

Câu 3 (1 điểm).

$X :=$ Số cây không đạt chuẩn trong 10 cây đã rút ra.

X có phân bố siêu bội với $N = 60, M = 3, n = 10$.

Trung bình số cây không đạt tiêu chuẩn là $E(X) = n \times \frac{M}{N} = 10 \times \frac{3}{60} = \mathbf{0,5}$.

Câu 4 (1+1+1+1+1 điểm).

x_i	0	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
n_i	150	33	52	127	73	35	30

a) $X :=$ nhu cầu của 1 hộ/tháng về loại sản phẩm này.

$$n = 500; \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^7 x_i n_i \approx 3,38; s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 n_i} \approx 2,4833;$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\gamma}{2} = 0,03; u_{\frac{\alpha}{2}} \approx 1,88.$$

$\mu :=$ nhu cầu trung bình của 1 hộ/tháng về loại sản phẩm này.

Ước lượng khoảng của μ là

$$\left(\bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \approx (3,1712; 3,5889).$$

\Rightarrow ước lượng khoảng của nhu cầu trung bình trong 1 tháng của toàn thành phố là

$$(500\,000 \times 3,1712; 500\,000 \times 3,5889) = \mathbf{(1\,585\,600; 1\,794\,450)}.$$

b) $Y :=$ mức tiêu thụ trong 1 tháng về loại sản phẩm này ở 1 hộ có nhu cầu sử dụng.

$$n = 350; \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^7 x_i n_i \approx 4,8286; s_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^7 (x_i - \bar{x})^2 n_i} \approx 1,3427;$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\gamma}{2} = 0,025; u_{\frac{\alpha}{2}} \approx 1,96.$$

$\mu' =$ mức tiêu thụ trung bình trong 1 tháng trên mỗi hộ ở các hộ có nhu cầu sử dụng.

Ước lượng khoảng của μ' là

$$\left(\bar{y} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_Y}{\sqrt{n}}; \bar{y} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_Y}{\sqrt{n}} \right) \approx \mathbf{(4,689; 4,969)}.$$

c) Tỷ lệ mẫu $f = \frac{73+35+30}{500} = 0,276$.

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\gamma}{2} = 0,01; u_{\frac{\alpha}{2}} \approx 2,33.$$

$$\sqrt{n} = 2,33 \frac{\sqrt{0,276 \cdot 0,724}}{0,04} \Rightarrow n \approx 679 \Rightarrow \text{cần điều tra thêm 179 hộ nữa.}$$

d) $p :=$ *tỷ lệ hộ hiện nay có nhu cầu sử dụng loại sản phẩm này.*

Ta cần kiểm định cặp giả thuyết sau:

$$H_0: p = 0,8; H_1: p \neq 0,8 (p_0 = 0,8)$$

Tỷ lệ mẫu là $f = \frac{350}{500} = 0,7$.

Vì $np_0 = 500 \cdot 0,8 \geq 5$ và $n(1 - p_0) = 500 \cdot 0,2 \geq 5$, ta có thể dùng chỉ tiêu kiểm định

$$T = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} = \frac{(0,7 - 0,8)\sqrt{500}}{\sqrt{0,8 \cdot 0,2}} = -5,59$$

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{\frac{\alpha}{2}}; +\infty) \approx (-\infty; -2,33) \cup (2,33; +\infty).$$

$T \in W_\alpha$, nên ta **bác bỏ H_0** .

Ghi chú:

1) Cũng có thể kiểm định cặp giả thuyết

$$H_0: p = 0,8; H_1: p < 0,8 (p_0 = 0,8)$$

Khi đó, dùng chỉ tiêu kiểm định như ở trên và $W_\alpha = (-\infty; -u_\alpha) \approx (-\infty; -2,05)$.

$T \in W_\alpha$, nên ta bác bỏ H_0 .

2) Nếu sinh viên lấy $H_1: p > 0,8$, không cho điểm.

e) $\mu :=$ *nhu cầu trung bình của 1 hộ/tháng về loại sản phẩm này trên thực tế.*

Ta cần kiểm định cặp giả thuyết:

$$H_0: \mu = 3,2 \quad H_1: \mu \neq 3,2 \quad (\mu_0 = \frac{1\,600\,000}{500\,000} = 3,2)$$

Ta dùng chỉ tiêu kiểm định:

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(3,38 - 3,2)\sqrt{500}}{2,4833} \approx 1,6208.$$

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{\frac{\alpha}{2}}; +\infty) \approx (-\infty; -1,96) \cup (1,96; +\infty).$$

$T \notin W_\alpha$, nên ta **chấp nhận H_0** .

Ghi chú:

1) Cũng có thể kiểm định cặp giả thuyết

$$H_0: \mu = 3,2; H_1: \mu > 3,2 (\mu_0 = 3,2)$$

Khi đó, dùng chỉ tiêu kiểm định như ở trên và $W_\alpha = (u_\alpha; +\infty) \approx (1,645; +\infty)$.

$T \notin W_\alpha$, nên ta chấp nhận H_0 .

2) Nếu sinh viên lấy $H_1: \mu < 3,2$, không cho điểm.

Áp dụng cho hệ: Đại học chính qui
Người ra đề: Bộ môn Toán
Ngày ra đề:
Ngày chọn đề:

Thời gian làm bài: 90 phút
Người duyệt đề:
Đại diện Phòng Đào tạo:
Đề số: 02

Câu 1 (2 điểm).

Một người có thu nhập trung bình hàng tháng trên 10 triệu đồng được xem là có thu nhập tốt. Theo số liệu thống kê, ở vùng A có 40% người có thu nhập tốt. Trong số những người có thu nhập tốt ở vùng A có 60% thích gửi tiết kiệm. Trong số những người có thu nhập không tốt ở vùng A có 30% thích gửi tiết kiệm.

- Tính tỉ lệ người ở vùng A không thích gửi tiết kiệm;
- Giả sử một người ở vùng A không thích gửi tiết kiệm, tính xác suất để người ấy có thu nhập tốt.

Câu 2 (2 điểm).

Chiều dài X và chiều rộng Y của tờ tiền 500 000 đồng được làm bằng máy tự động là các biến ngẫu nhiên độc lập và tuân theo luật phân phối (xấp xỉ) chuẩn với độ lệch tiêu chuẩn là $0,01mm$. Một tờ tiền loại này được coi là có kích thước đạt tiêu chuẩn nếu chiều dài và chiều rộng thực tế của nó sai lệch so với kích thước trung bình không quá $0,02 mm$ (tức là $|X - E(X)| \leq 0,02$ và $|Y - E(Y)| \leq 0,02$).

- Tìm tỉ lệ tờ 500 000 đồng có kích thước đạt tiêu chuẩn;
- Tính trung bình số tờ 500 000 đồng có kích thước không đạt tiêu chuẩn khi máy làm ra 10 000 tờ.

Câu 3 (1 điểm).

Từ thống kê số khách trên xe buýt tại một tuyến giao thông, Công ti xe buýt xây dựng được bảng phân phối xác suất của số khách trên một chuyến như sau:

Số khách trên một chuyến	20	25	30	35	40
Tần suất tương ứng	0,2	0,3	0,15	0,1	0,25

Nếu chi phí cho mỗi chuyến xe là 200 nghìn đồng và không phụ thuộc vào số khách đi trên xe, thì muốn thu được lãi bình quân cho mỗi chuyến xe là 100 nghìn đồng Công ti này phải quy định giá vé là bao nhiêu?

Câu 4 (5 điểm).

Mẫu điều tra về giá bán X (đơn vị: 1000 đồng) của mỗi cổ phiếu A trên thị trường chứng khoán trong các phiên giao dịch được cho ở bảng sau

x_i	[11; 13)	[13; 15)	[15; 17)	[17; 19)	[19; 21)	[21; 23)	[23; 25)
Số phiên	5	17	23	33	25	16	2

- Với độ tin cậy 95%, hãy tìm khoảng tin cậy đối xứng của doanh thu trung bình khi bán 10 000 cổ phiếu A trên thị trường với độ tin cậy 95%;
- Nếu muốn ước lượng giá bán trung bình của một cổ phiếu A đạt độ chính xác là 500 đồng và độ tin cậy là 98% thì cần điều tra thêm bao nhiêu phiên nữa?
- Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng tỉ lệ tối thiểu cổ phiếu A có giá bán từ 17 nghìn đồng trở lên.
- Biết rằng giá bán một cổ phiếu A là biến ngẫu nhiên có phân phối (xấp xỉ) chuẩn. Với độ tin cậy 90%, hãy tìm khoảng tin cậy đối xứng của phương sai giá bán một cổ phiếu A;
- Biết rằng giá bán một cổ phiếu A là biến ngẫu nhiên có phân phối (xấp xỉ) chuẩn và trước kia độ phân tán là $\sqrt{11}$ nghìn đồng. Với mức ý nghĩa 2%, có thể cho rằng độ phân tán về giá bán của loại cổ phiếu này có xu hướng giảm xuống so với trước đây không?

Cho biết:

$$\Phi_0(2) \approx 0,47725; u_{0,05} \approx 1,64; u_{0,025} \approx 1,96; u_{0,01} \approx 2,326;$$
$$\chi_{0,05}^{2(120)} \approx 146,57; \chi_{0,95}^{2(120)} \approx 95,7; \chi_{0,98}^{2(120)} \approx 90,02.$$

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 2

Câu 1 (1+1 điểm).

$H :=$ “Một người vùng A có thu nhập tốt”.

$K :=$ “Một người ở vùng A thích gửi tiết kiệm”.

a) $P(\bar{K}) = P(H)P(\bar{K}|H) + P(\bar{H})P(\bar{K}|\bar{H}) = P(H)[1 - P(K|H)] + [1 - P(H)][1 - P(K|\bar{H})]$
 $= 0,4 \cdot (1 - 0,6) + (1 - 0,4)(1 - 0,3) = \mathbf{0,58}$ (58%).

b) $P(H|\bar{K}) =_{\text{Bayes}} \frac{P(H)P(\bar{K}|H)}{P(H)P(\bar{K}|H) + P(\bar{H})P(\bar{K}|\bar{H})} = \frac{0,16}{0,16 + (1-0,4)(1-0,3)} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{29}}$.

Câu 2 (1+1 điểm).

$X :=$ Chiều dài của tờ 500 000 đồng; $Y :=$ Chiều rộng của tờ 500 000 đồng.

$X \sim N(\mu_1; 0,01^2)$; $Y \sim N(\mu_2; 0,01^2)$.

$A :=$ “Một tờ tiền có kích thước đạt tiêu chuẩn”;

a) $P(A) = P\{|X - \mu_1| \leq 0,02\} \cdot P\{|Y - \mu_2| \leq 0,02\} =$

$= 2\Phi_0\left(\frac{0,02}{0,01}\right) 2\Phi_0\left(\frac{0,02}{0,01}\right) = 4 \cdot 0,47725^2 \approx \mathbf{0,91107}$.

b) $Z :=$ Số tờ có kích thước không đạt tiêu chuẩn.

Do $Z \sim B(10\,000; P(\bar{A}))$, nên $E(Z) = 10\,000 \cdot P(\bar{A}) = 10\,000 \cdot [1 - P(A)] \approx \mathbf{889}$.

Câu 3 (1 điểm).

Gọi $X :=$ Số khách trên 1 chuyến xe buýt, $Y :=$ Tiền lãi cho 1 chuyến xe buýt (đơn vị: nghìn đồng).

$Y = tX - 200$.

$E(Y) = 100 \Leftrightarrow tE(X) - 200 = 100$.

Vì $E(X) = 20 \times 0,2 + 25 \times 0,3 + 30 \times 0,15 + 35 \times 0,1 + 40 \times 0,25 = 29,5$, nên $29,5t - 200 = 100 \Rightarrow$

$t = \mathbf{10,17}$ nghìn đồng.

Câu 4 (1+1+1+1+1 điểm).

Thay mỗi khoảng trong mẫu bởi một số làm đại diện, ta có

x_i	12	14	16	18	20	22	24
n_i	5	17	23	33	25	16	2

a) $n = 121 > 30$; $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^7 x_i n_i \approx 17,8512$; $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 n_i} \approx 2,8421$;

$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\gamma}{2} = 0,025$; $u_{\frac{\alpha}{2}} \approx 1,96$.

$\mu :=$ Doanh thu trung bình khi bán 1 cổ phiếu.

Khoảng tin cậy của μ là $\left(\bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$.

Ước lượng khoảng của μ là $(17,8512 - 0,5064; 17,8512 + 0,5064) = (17,3448; 18,3576)$.

Ước lượng khoảng của doanh thu trung bình khi bán 10 000 cổ phiếu là

$(17,3448 \times 10000; 18,3576 \times 10000) = \mathbf{(173448; 183576)}$ (nghìn đ).

b) Ta dùng công thức $P\left\{|\mu - \bar{X}| < u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right\} \approx \gamma$.

Với $\gamma = 0,98$, ta có $\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\gamma}{2} = 0,01$; $u_{\frac{\alpha}{2}} \approx 2,326$.

Độ chính xác $\varepsilon = u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_{mới}}{\sqrt{n_{mới}}} \Rightarrow \sqrt{n_{mới}} = u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_{mới}}{\varepsilon} \approx 2,326 \frac{2,8421}{0,5} \approx 13,2214 \Rightarrow n_{mới} \approx 175$.

Như vậy, cần điều tra thêm $175 - 121 = \mathbf{54}$ phiên.

c) $n = 121$, tỉ lệ mẫu là $f = \frac{76}{121}$.

$\alpha = 1 - \gamma = 0,05$, $u_\alpha \approx 1,64$.

Từ khoảng tin cậy bên phải của p , ta có

$$f - u_\alpha \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \approx \frac{76}{121} - 1,64 \frac{\sqrt{\frac{76}{121} \cdot \frac{45}{121}}}{\sqrt{121}} \approx 0,556.$$

Với độ tin cậy 95%, tỉ lệ tối thiểu cổ phiếu có giá bán từ 17 nghìn đồng trở lên là **gần 55,6%**.

Ghi chú: Có thể dùng khoảng tin cậy đối xứng của p . Khi ấy ta có

$$f - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \approx \frac{76}{121} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{76}{121} \cdot \frac{45}{121}}}{\sqrt{121}} \approx 0,542.$$

d) $s^2 \approx 8,07768595$; $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)} = \chi_{0,05}^{2(120)} \approx 146,57$; $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)} = \chi_{0,95}^{2(120)} \approx 95,7$.

Khoảng tin cậy đối xứng của phương sai giá bán cổ phiếu A là

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}}; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}} \right) \approx \mathbf{(6,6133; 10,1288)}.$$

e) $\sigma :=$ độ phân tán về giá bán của cổ phiếu A hiện nay.

Kiểm định cặp $H_0: \sigma = \sqrt{11}$; $H_1: \sigma < \sqrt{11}$.

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \approx \frac{120 \cdot 8,0777}{11} \approx 88,1204.$$

$$W_\alpha = \left(-\infty; \chi_{1-\alpha}^{2(n-1)} \right) = \left(-\infty; \chi_{0,98}^{2(120)} \right) \approx (-\infty; 90,02).$$

$T \in W_\alpha$, nên **bác bỏ H_0** , hay cho rằng **độ phân tán về giá bán cổ phiếu A giảm xuống so với trước đây**.

Ghi chú: Nếu sinh viên lấy $H_1: \sigma \neq 3,2$ hoặc $H_1: \sigma > 3,2$, không cho điểm.