



Dạng hàm

Nội dung



1. Nhắc lại khái niệm biên tế & hệ số co dẫn
2. Mô hình hồi quy qua gốc toạ độ
3. Mô hình tuyến tính Log
4. Mô hình bán logarit (semilog)
 - * Mô hình Log – Lin (logarit – linear)
 - * Mô hình Lin – Log (linear – logarit)
5. Mô hình nghịch đảo
6. Mô hình đa thức
7. Mô hình có độ trễ phân phối

1.1 Khái niệm biên tế (Marginal)

- Cho $Y = f(X)$, giá trị biên tế của Y theo X :

$$M_{YX} = \Delta Y / \Delta X \rightarrow \Delta Y = M_{YX} \cdot \Delta X$$

- $\Delta Y, \Delta X$: lượng thay đổi tuyệt đối của Y & của X
- Ý nghĩa: M_{YX} cho biết lượng thay đổi tuyệt đối của biến phụ thuộc Y khi biến độc lập X thay đổi 1 đơn vị
- Khi $\Delta X \rightarrow 0$, $M_{YX} \approx dY/dX \approx f'(X)$

1.2 Khái niệm hệ số co giãn (Elasticity - E_{YX})

$$E_{YX} = \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X}$$

Thay đổi tương đối của Y : $100 \frac{\Delta Y}{Y} = E_{YX} (100 \frac{\Delta X}{X})$

- Ý nghĩa: E cho biết thay đổi tương đối của Y(%) khi X thay đổi 1%.
Khi $\Delta X \rightarrow 0$, $E_{YX} \approx f'(X) \cdot (X/Y)$

2. Mô hình hồi quy qua gốc tọa độ

$$PRF \rightarrow Y_i = \beta_2 X_i + U_i$$

$$SRF \rightarrow \hat{Y}_i = \hat{\beta}_2 X_i + e_i$$

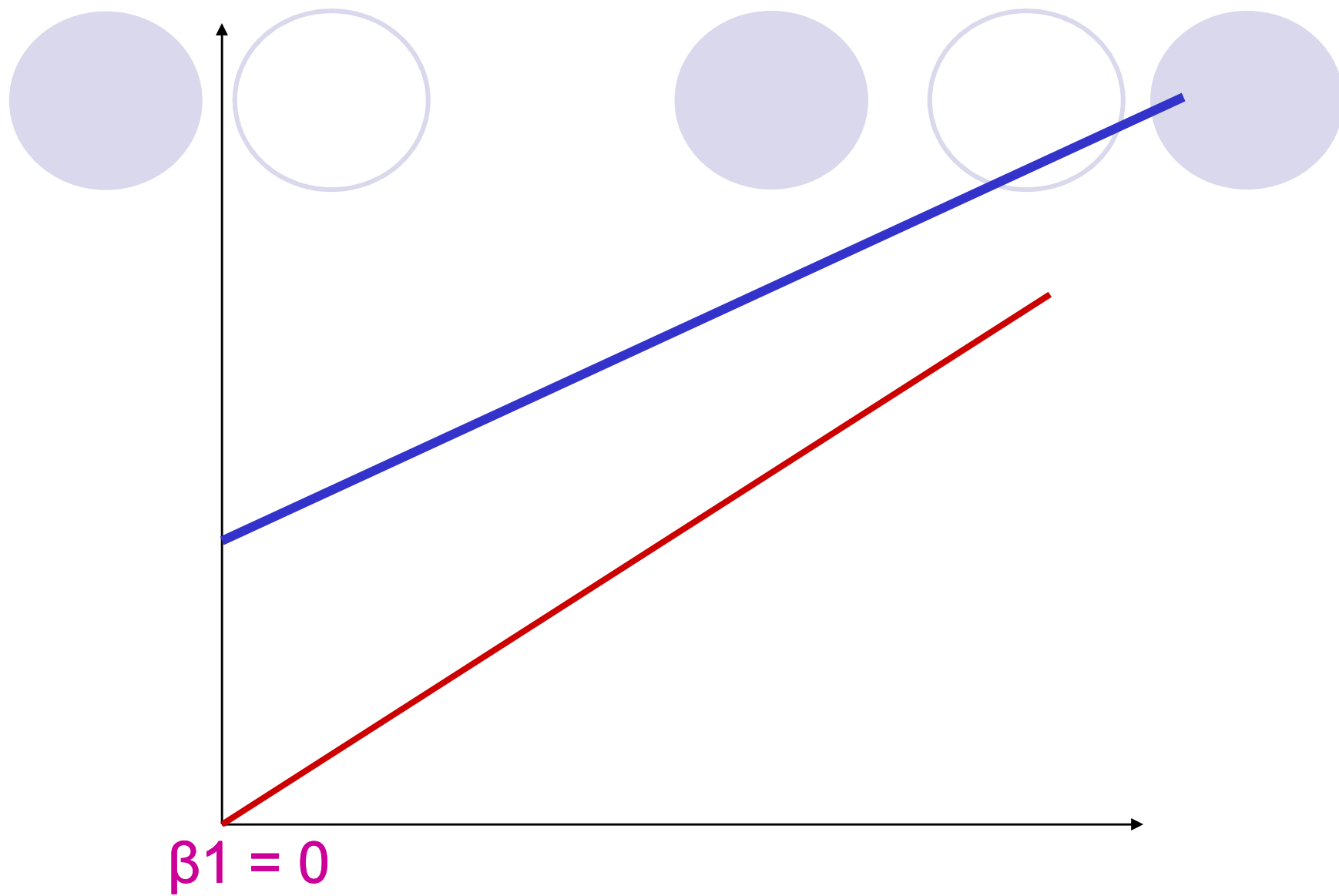
Phương pháp OLS cho ta :

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} ; \text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

$$R_{tho}^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i^2}$$

σ^2 ước lượng bởi :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-1} = \frac{RSS}{n-1}$$



Mô hình hồi quy qua gốc tọa độ

- Chỉ nên sử dụng mô hình này khi có 1 **tiên nghiệm mạnh**.
- Thường, nên dùng hồi quy 2 biến bình thường + kiểm định β_1 :
 - * Chấp nhận H_0 , **β_1 không có ý nghĩa thống kê** → dùng HQ qua gốc tọa độ
 - * Bác bỏ H_0 → **β_1 khác 0, có ý nghĩa thống kê** → Mô hình bình thường
- Hoặc: ước lượng cả 2 mô hình → **so sánh hệ số xác định** → chọn mô hình phù hợp hơn
- Nếu mô hình đúng phải có β_1 nhưng chọn mô hình này → sai số đặc trưng: nghiêm trọng

3. Mô hình tuyến tính Logarit

(Mô hình Log – Log hay Log kép)

- Hệ số góc β_2 biểu thị hệ số co giãn của Y đối với X: cho biết khi X thay đổi 1% thì Y thay đổi bao nhiêu %
- Xét mô hình hồi qui mũ: $Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} e^{u_i}$
- Ta chuyển về dạng $\ln Y_i = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + U_i$

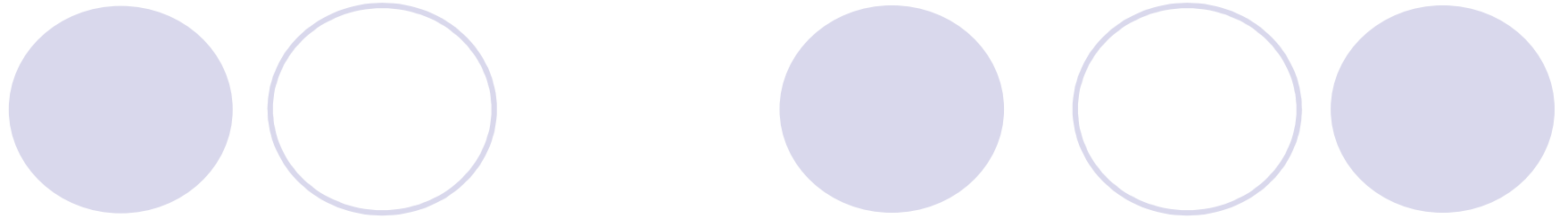
$$\alpha = \ln \beta_1 \rightarrow \ln Y_i = \alpha + \beta_2 \ln X_i + U_i$$

$$\text{Với: } Y_i^* = \ln Y_i ; X_i^* = \ln X_i$$

$$\text{phương trình trở thành: } Y_i^* = \alpha + \beta_2 X_i^* + U_i$$

$$\text{Mô hình (log-log)} \rightarrow \beta_2 = E_{Y/X} = \frac{dY/Y}{dX/X} = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y}$$

- **Mô hình trên tuyến tính theo các tham số, tuyến tính theo logarit của các biến Y và X.**



$\ln Y = \dots \ln X$

Biến X, nhập số liệu dạng $\ln X$

Biến Y, nhập số liệu dạng $\ln Y$

Ví dụ C.3.2

Năm (MỸ)	Y	X
70	2,57	0,77
71	2,5	0,74
72	2,35	0,72
73	2,3	0,73
74	2,25	0,76
75	2,2	0,75
76	2,11	1,08
77	1,94	1,81
78	1,97	1,39
79	2,06	1,20
80	2,02	1,17

$$Y_i^* = 0,7774 - 0,253 \ln X_i$$

$$R^2 = 0,7448$$

→ hệ số co giãn cầu theo giá là $-0,253$

Vi $\beta_2 < 0 \rightarrow X_i$ & Y_i nghịch biến

→ Giá tăng(giảm)1%, số tách cafe tiêu thụ giảm(tăng) 0,253%

Y: số tách café/người/ngày

X: Giá, USD/pao

4.1. Mô hình semilog dạng log - lin

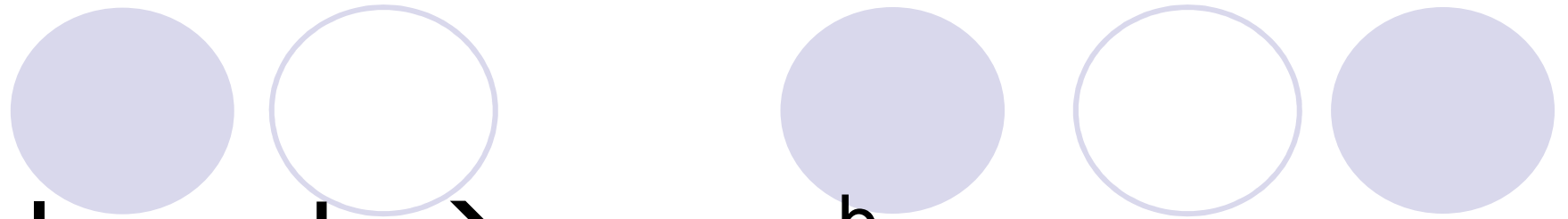
- Mô hình Log – Lin thích hợp với khảo sát tốc độ tăng trưởng hay giảm sút của các biến kinh tế vĩ mô như dân số, lượng lao động, GDP, GNP, lượng cung \$, năng suất, thâm hụt thương mại, ...
- Từ công thức tính lãi gộp:

$$Y_t = Y_0(1 + r)^t ; r - \text{tốc độ tăng trưởng gộp theo thời gian của } Y$$

$$\rightarrow \ln Y_t = \ln Y_0 + t \cdot \ln(1 + r)$$

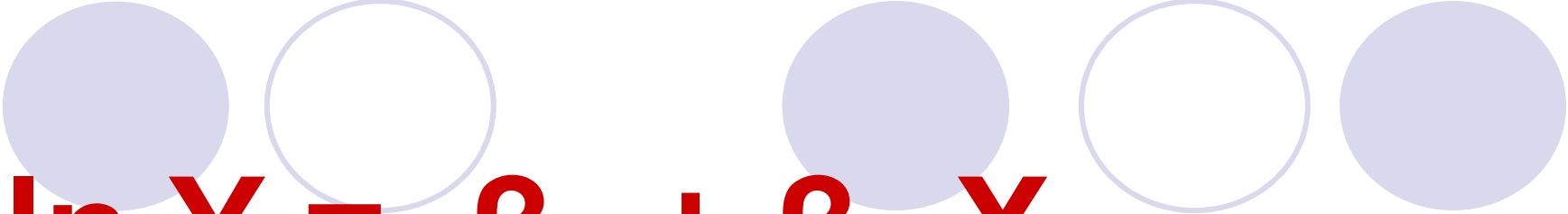
$$\text{Với } \beta_1 = \ln Y_0 ; \beta_2 = \ln(1 + r)$$

Ta có : $\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot t \rightarrow$ tuyến tính theo tham số
biến độc lập là thời gian $t = 1; 2; 3; \dots$



$$\ln a = b \rightarrow a = e^b$$

$$\ln Y_0 = \beta_1 \rightarrow Y_0 = e^{\beta_1}$$

A decorative header consisting of five circles in a horizontal row. The first, third, and fifth circles are solid light purple, while the second and fourth circles are white with a light purple outline.
$$\ln Y = \beta_1 + \beta_2 X$$

Biến X, nhập số liệu bình thường

Biến Y, nhập số liệu dạng $\ln Y$

Ví dụ C.3.3

Năm (t)	72	73	74	75	76	77	78
RGDP (Y)	3107.1	3268.6	3248.1	3221.7	3380.8	3533.3	3703.5
Năm	79	80	81	82	83	84	85
RGDP	3796.8	3776.3	3843.1	3760.3	3906.6	4148.5	4279.8
Năm	86	87	88	89	90	91	
RGDP	4404.5	4539.9	4718.6	4838.0	4877.5	4821.0	

$$\ln \hat{Y}_i = 8,0139 + 0,0247t \quad R^2 = 0,9738$$

* $\beta_2 = 0,0247 = 2,47\%$: tu 1972–1991, GDP thực/Hoa Kỳ tăng 2,47% năm

* $\beta_1 = \ln Y_0 = 8,0139 \rightarrow \hat{Y}_0 = e^{8,0139} = 3022,7 \rightarrow$ năm 1972, RGDP $\approx 3022,7$ tỷ USD

Giá trị thực tế là 3107,1 \Rightarrow Chênh lệch 84,4 tỷ USD (lệch 2,71%)

4.2. Mô hình semilog dạng lin- log

- Vận dụng mô hình Lin – Log để khảo sát: lượng cung \$ ảnh hưởng tới GNP, diện tích trồng trọt ảnh hưởng tới sản lượng cây trồng, diện tích căn nhà ảnh hưởng tới giá nhà, ..
- Khảo sát quan hệ GNP (Y) với lượng cung tiền (X): Y tăng bao nhiêu theo số tuyệt đối khi X tăng 1%?

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + U_i \Rightarrow \text{Vi phân} \rightarrow \frac{dY}{dX} = \beta_2 \cdot (1/X)$$

$$\Rightarrow \beta_2 = \frac{dY}{(dX/X)} \Rightarrow \text{thay đổi tuyệt đối của Y / thay đổi tương đối của X}$$

$$\Delta Y = \beta_2 (\Delta X / X): \text{lượng thay đổi tuyệt đối của Y nếu thay đổi của X}$$

$$\text{tính bằng \%} \left(100 \cdot \frac{\Delta X}{X} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta Y = \frac{\beta_2}{100} \left(100 \frac{\Delta X}{X} \right) = 0,01 \beta_2 \left(100 \frac{\Delta X}{X} \right)$$

Vậy: X thay đổi 1% \rightarrow Y thay đổi $(0,01 \beta_2)$ đơn vị



$$Y = \beta_1 + \beta_2 \ln X$$

Biến X, nhập số liệu dạng $\ln X$

Biến Y, nhập bình thường

Ví dụ C3.4

Năm	GNP (Y- Tỷ USD)	Lượng cung tiền (X – tỷ USD)	Năm	GNP (Y)	Lượng cung tiền (X)
1973	1359,3	861,0	1981	3052,6	1795,5
1974	1472,8	908,5	1982	3166,0	1954,0
1975	1598,4	1023,2	1983	3405,7	2185,2
1976	1782,8	1163,7	1984	3772,2	2363,6
1977	1990,5	1286,7	1985	4014,9	2562,6
1978	2249,7	1389,0	1986	4240,3	2807,7
1979	2508,2	1500,2	1987	4526,7	2901,0
1980	2723,0	1633,1			

$$\hat{Y}_i = -16329,21 + 2584,785 \ln X_i \quad R^2 = 0,9831$$

$\beta_2 = 2584,785 \approx 2585$ nghĩa là :tu nam 1973 –1987, lượng cung tiền tăng lên 1% bình quân kéo theo tăng GNP khoảng 25,85 tỷ USD

4. Mô hình nghịch đảo

- $Y_i = \beta_1 + \beta_2 (1/X_i)$
 - $X \rightarrow \infty, \beta_2 (1/X_i) \rightarrow 0$ và $Y \rightarrow$ tiệm cận β_1
 - **Áp dụng 1:** Chi phí SX cố định trung bình (AFC) và sản lượng: AFC giảm liên tục khi sản lượng tăng. Cuối cùng, sẽ tiệm cận với trục sản lượng ở mức β_1
 - **Áp dụng 2:** Tỷ lệ thay đổi \$ lương và tỷ lệ thất nghiệp qua đường cong Phillip
 - **Áp dụng 3:** Đường chi tiêu Engel: chi tiêu cho 1 hàng hoá với thu nhập
- * Dưới Mức thu nhập tới hạn ($-\beta_2/\beta_1$) \rightarrow người tiêu dùng không mua SP này
 - * Mức tiêu dùng bão hoà (đã thoả mãn), cao hơn mức đó \rightarrow không chi tiêu cho SP này dù thu nhập có cao đi nữa. Mức này là đường tiệm cận β_1

Ví dụ C3.5: Tỷ lệ thay đổi \$ lương (Y) và tỷ lệ thất nghiệp (X) của Anh giai đoạn 1950 - 1966

Năm	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
Y (%)	1.8	8.5	8.4	4.5	4.3	6.9	8.0	5.0	3.6	2.6	2.6	4.2	3.6	3.7	4.8	4.3	4.6
X (%)	1.4	1.1	1.5	1.5	1.2	1.0	1.1	1.3	1.8	1.9	1.5	1.4	1.8	2.1	1.5	1.3	1.4

- $Y_t = -1,4282 + 8,7243 (1/X_t)$ $R^2 = 0,3848$
- $\beta_1 = -1,4282 \rightarrow$ Khi X tăng lên vô hạn, tỷ lệ giảm sút \$ lương không vượt quá 1,43 % năm
- R^2 khá thấp nhưng β_2 khác 0 có ý nghĩa thống kê và có dấu đúng (Vì vậy không nên nhấn mạnh quá mức giá trị R^2)

Tóm tắt một số dạng hàm 2 biến thông dụng

Hàm	Phương trình	Biên tế Myx	Hệ số co dẫn	Ý nghĩa của hệ số góc
Tuyến tính	$Y = \beta_1 + \beta_2 X$	β_2	$\beta_2(X/Y)$	X tăng 1 đv, Y thay đổi β_2 đv
Tuyến tính log kép	$\ln Y = \beta_1 + \beta_2 \ln X$	$\beta_2(Y/X)$	β_2	X tăng 1 %, Y thay đổi $\beta_2\%$
Log – Lin	$\ln Y = \beta_1 + \beta_2 X$	$\beta_2 Y$	$\beta_2 X$	X tăng 1 đv, Y thay đổi $100\beta_2 \%$
Lin - Log	$Y = \beta_1 + \beta_2 \ln X$	$\beta_2(1/X)$	$\beta_2(1/Y)$	X tăng 1%, Y thay đổi $(\beta_2/100)$ đơn vị
Ng-đảo	$Y = \beta_1 + \beta_2 (1/X)$	$-\beta_2(1/X^2)$	$-\beta_2(1/XY)$	

SO SÁNH DẠNG HÀM DỰA VÀO R^2

- ⊕ Phải cùng cỡ mẫu (n) và cùng số tham số
- ⊕ Biến phụ thuộc (Y) phải cùng dạng
(các biến độc lập có thể khác dạng)

VD: $\ln Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + u_i$

với: $Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + u_i$

\Rightarrow không so sánh được.

Bài tập 1

Dựa vào số liệu hàng tháng từ 1/1978 đến 12/1987 ta được các kết quả hồi qui:

$$\begin{aligned} 1/ \underline{Y_t} &= \underline{0,00681 + 0,7581 X_t} \\ Se &= (0,02596) \quad (0,27009) \\ t &= (0,26229) \quad (2,807) \\ p &= (0,7984) \quad (0,0186) \\ R^2 &= 0,4406 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2/ \underline{Y_t} &= \underline{0,76214 X_t} \\ R^2 &= 0,43684 \\ Se &= (0,265799) \\ t &= (2,95408) \\ p &= (0,0131) \end{aligned}$$

- Với: Y – suất sinh lời hàng tháng cổ phiếu thường của Texaco (%)
- X – suất sinh lời thị trường (%)

Yêu cầu:

- 1/ Khác nhau giữa 2 mô hình?
 - 2/ Chọn mô hình nào, tại sao?
 - 3/ Giải thích hệ số góc của 2 mô hình
 - 4/ Có thể so sánh R^2 của 2 mô hình trên không, tại sao?
- (Cho biết độ tin cậy = 95%; n = 10)



(1). Mô hình (1): $Y = \beta_1 + \beta_2 X$, nghĩa là mô hình bình thường, có tung độ gốc

Mô hình (2): $Y = \beta_2 X$ – là mô hình hồi quy qua gốc tọa độ

(2). Để chọn mô hình nào phù hợp hơn, ta kiểm định
 β_1 trong mô hình (1).

$$H_0: \beta_1 = 0 ; H_1: \beta_1 \neq 0$$

$$t_0 = 0,26229$$

$$t_{\alpha/2; (n-2)} = t_{0,025; 8} = 2,306$$

$$t_0 = 0,26229 < t_{\alpha/2; (n-2)} = 2,306 \rightarrow \text{Chấp nhận } H_0$$

$\rightarrow \beta_1$ không có ý nghĩa thống kê

\rightarrow **Mô hình phù hợp hơn là mô hình đi qua gốc tọa độ (mô hình 2)**

(3). Ý nghĩa kinh tế của β_2 trong hàm (2)

$$Y_t = 0,76214 X_t$$

$\beta_2 = 0,76214 > 0 \rightarrow X$ và Y đồng biến. Khi suất sinh lời của thị trường tăng (giảm) 1%, suất sinh lời của cổ phiếu thường Taxaco tăng (giảm) 0,76214%

* Phát biểu tương tự cho hàm (1)

(4). Không thể so sánh R^2 , do giá trị xấp xỉ nhau và công thức tính khác nhau

Bài tập 2

X	1000	1042	1092	1105	1110	1257	1749	1770
Y	1000	1023	1040	1087	1146	1285	1485	1521

Xem bảng số liệu dưới đây. Với:

* Y – chỉ số giảm phát GDP đối với hàng nội địa (Y)

* X – chỉ số giảm phát GDP đối với hàng nhập khẩu giai đoạn

1968 – 1982.

1889	1974	2015	2260	2621	2777	2735
1543	1567	1592	1714	1841	1959	2033

Để nghiên cứu quan hệ giá nội địa và giá thế giới, ta có 2 mô hình:

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + U_i$$

$$Y_i = \beta X_i + U_i$$

Hãy ước lượng 2 mô hình trên và chọn mô hình nào thích hợp hơn?

- **Mô hình 1**

$$Y = \alpha_1 + \alpha_2 X$$

$$Y = 516,09 + 0,534 X$$

$$R^2 = 0,979$$

- **Kiểm định α_1**

$$t_0 = \frac{\hat{\alpha}_1}{se(\hat{\alpha}_1)} = \frac{516,09}{40,56} = 12,72$$

$$t_{0,025;13} = 2,16$$

$$t_0 = 12,72 > t_{0,025;13} = 2,16$$

- **Mô hình 2**

$$Y = \beta_2 X$$

$$Y = 0,795 X$$

$$R^2_{thô} = 0,9858$$

**Bác bỏ $H_0 \rightarrow \alpha_1$
có ý nghĩa
thống kê \rightarrow Mô
hình bình
thường phù
hợp hơn**

Bài tập 3

1207 (1972)	1349,6 (1973)	1458,6 (1974)	1585,9 (1975)	1768,4 (1976)	1974,1 (1977)	2232,7 (1978)
2488,6 (1979)	2708 (1980)	3030,6 (1981)	3149,6 (1982)	3405 (1983)	3777,2 (1984)	4038,7 (1985)
4268,6 (1986)	4539,9 (1987)	4900,4 (1988)	5250,8 (1989)	5522,2 (1990)	5677,5 (1991)	

- Trên đây là GDP của Hoa Kỳ giai đoạn 1972 – 1991 tính theo Tỷ USD hiện hành. Tính tốc độ tăng trưởng GDP danh nghĩa của Hoa Kỳ trong giai đoạn trên.
(Hồi qui $Y = \ln(\text{GDP})$ theo thời gian t : $t = 1; 2; 3 \dots \rightarrow \ln Y$ theo t)
- Nêu ý nghĩa kinh tế của các hệ số hồi quy

Bài tập 4

GNP (1970 - 1976)	85.685	94.450	105.234	123.560	147.528	165.343	191.857	
Lượng cung \$	9.077	10.178	11.626	13.320	14.555	16.566	17.889	
GNP (1977- 1984)	210.189	232.211	264.279	297.556	339.793	358.302	390.340	420.819
Lượng cung \$	19.381	21.328	22.823	24.254	25.379	25.541	28.137	28.798

Y(GNP), X(lượng cung \$) của Canada giai đoạn 1970 – 1984. Hãy sử dụng bảng số liệu trên để ước lượng mô hình:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \ln X_t + U_t$$

Nêu ý nghĩa kinh tế của các hệ số hồi quy

Bài tập 5

GNP (1970 - 1976)	86.685	95.450	104.23	122.56	149.52	166.34	189.85	
Lượng cung \$	10.077	10.678	11.026	12.620	14.85	16.566	17.489	
GNP (1977- 1984)	208.189	230.21	266.27	296.55	339.19	356.30	390.34	420.81
Lượng cung \$	18.781	21.328	23.223	24.35	25.239	25.12	28.137	28.798

Y(GNP), X(lượng cung \$) của Canada giai đoạn 1979 – 1984. Hãy sử dụng bảng số liệu trên để ước lượng mô hình: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 \ln X_t + U_t$
Nêu ý nghĩa kinh tế các hệ số hồi quy



(1). Sử dụng hàm $Y = \beta_1 + \beta_2 X$

Nhập biến $X \rightarrow \ln X$

(2) Sử dụng hàm $Y = \beta_1 + \beta_2 \ln X$

($A + B \ln X \rightarrow$ hàm lin - log)

Nhập $X \rightarrow$ nhập bình thường

Hướng dẫn sử dụng máy tính để hồi quy

❖ 500, 570 MS: MODE(1 hoặc 2 lần) → REG
(Regression - 2)

→ LIN - 1 (Linear) → Nhập số liệu (X nhập trước,
Y nhập sau): 7.0 → dấu (,) → 28 → M⁺ (n=1) →
nhập tiếp cho đến hết → **AC**

❖ 570 ES: MODE → STAT – 3 (Statistic) →
A+BX – 2 → Nhập số liệu → **AC**

Sử dụng máy tính để tính hồi quy

(1). Máy 500

- AC → Shift 1 →

$$\sum x^2 \Rightarrow (\sum X^2) ; \sum y^2 \Rightarrow (\sum Y^2)$$

$$\sum xy \Rightarrow \sum XY \dots\dots$$

- AC → Shift 2 → REPLAY (Phải) → A(β_1) B(β_2) r ($r^2 = R^2$)

(2). Máy 570 ES

- AC → Shift 1 → 7 (REG) → A(β_1) B(β_2) r ($r^2 = R^2$)
- AC → Shift 1 → 4 (SUM) ; 5 (VAR) ; ...



Kiểm tra số liệu

(1). Máy 500, 570MS: REPLAY (trên hoặc dưới) →
FREQ 10 (10 cặp số liệu) → REPLAY trên → x10 →
Nếu số sai → chọn lại số đúng → dấu = Tiếp tục cho
đến hết

(2). Máy 570ES: Shift 1 → DATA (2) → Nếu số sai →
sửa tại chỗ

Thiết kế một số công thức khác

Ví dụ TSS, ESS, Var (β_2), ...

$$TSS = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n(\bar{Y})^2$$

* AC \rightarrow SHIFT 1 $\rightarrow \sum Y^2$

\rightarrow Dấu (-)

\rightarrow 10 (n = 10)

\rightarrow SHIFT 2 $\rightarrow \bar{Y} \Rightarrow \bar{Y}^2$

\rightarrow Dấu =

$$ESS = \hat{\beta}_2^2 (\sum X^2 - n\bar{X}^2)$$

* AC \rightarrow Shift 2 \rightarrow 2 (B) $\rightarrow B^2$

\rightarrow dấu () \rightarrow Shift 1 $\rightarrow \sum X^2$

\rightarrow dấu trừ \rightarrow n \rightarrow Shift 2

\rightarrow

$$\bar{X} \Rightarrow \bar{X}^2 \rightarrow =$$



Cách (1). Sử dụng hàm $Y = \beta_1 + \beta_2 X$ (Hàm LIN)

→ Nhập biến X dưới dạng $1/X$

Cách (2). Sử dụng hàm nghịch biến $Y = \beta_1 + \beta_2 (1/X)$

→ Nhập biến X bình thường

(Hàm Nghịch biến: Máy 500, 570 MS →
chọn hàm INV (INVERSE)
Máy 570 ES, chọn hàm $1/X$)