

MODULE 4. CÁC HỆ ĐẾM DÙNG TRONG TIN HỌC

4.1. Hệ đếm

Để có cơ sở hình dung quá trình xử lý thông tin xảy ra bên trong MTĐT như thế nào, chúng ta cần có một số kiến thức về hệ đếm nhị phân. Hệ đếm được hiểu như tập các kí hiệu và quy tắc sử dụng tập kí hiệu đó để biểu diễn và xác định giá trị các số.

Xét ví dụ về hệ đếm La mã

Hệ đếm La mã sử dụng các kí hiệu I, V, X, L, C, D, M. Mỗi kí hiệu của hệ đếm La mã biểu thị một giá trị :

$$I = 1 ; V = 5 ; X = 10 ; L = 50 ; C = 100 ; D = 500 ; M = 1000$$

Dưới đây là một số quy tắc tính giá trị được dùng trong hệ đếm La mã:

- Nếu các kí hiệu được xếp từ trái qua phải theo chiều giảm giá trị thì giá trị của biểu diễn số tính bằng tổng giá trị các kí hiệu. Ví dụ MLVI cho giá trị là $1000+50+5+1 = 1056$.
- Nếu trong biểu diễn số tính từ trái qua phải có một cặp hai kí hiệu mà kí hiệu đứng trước có giá trị nhỏ hơn thì giá trị của cặp đó tính bằng hiệu hai giá trị. Không chấp nhận các bộ có nhiều hơn hai kí hiệu liên tiếp xếp theo chiều tăng của giá trị. Ví dụ CIX thể hiện số 109. Biểu diễn IXC không hợp lệ vì nó sẽ gây nhập nhằng không đơn nghĩa với quy tắc tính giá trị.

Như vậy, mỗi kí hiệu đại diện cho một giá trị duy nhất và không phụ thuộc vào vị trí của nó xuất hiện ở đâu trong biểu diễn. Hệ đếm loại này gọi là hệ đếm không theo vị trí.

Chúng ta thường sử dụng hệ đếm thập phân. Hệ thập phân dùng là mười ký hiệu là các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Trong hệ đếm này giá trị của mỗi chữ số phụ thuộc vào vị trí của nó trong biểu diễn. Ví dụ, trong số 545, chữ số 5 ở hàng đơn vị chỉ 5 đơn vị trong khi chữ số 5 ở hàng trăm chỉ 500 đơn vị. Hệ đếm mà giá trị của các kí hiệu trong biểu diễn số phụ thuộc vào vị trí được gọi là hệ đếm theo vị trí.

Số lượng các chữ số được sử dụng (10 chữ số) gọi là cơ số của hệ đếm. Quy tắc tính giá trị là mỗi đơn vị ở một hàng bất kỳ có giá trị bằng 10 đơn vị của hàng kế cận bên phải. Do đó, giá trị của một biểu diễn có thể viết dưới dạng một đa thức của cơ số.

$$\text{Ví dụ. } 536,4 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1}$$

Hệ đếm thập phân chỉ là một trường hợp riêng khi chọn cơ số là 10. Thực ra, bất kì một số tự nhiên b nào lớn hơn 1 đều có thể chọn làm cơ số cho hệ đếm. Các kí hiệu được dùng cho hệ đếm đó sẽ là ký hiệu đại diện cho các giá trị: 0, 1, ..., $b-1$. Nếu một số N trong hệ đếm cơ số b nếu có biểu diễn là :

$$N = d_n d_{n-1} d_{n-2} \dots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} \dots d_{-m}$$

thì giá trị của N được tính theo công thức :

$$N = d_n b^n + d_{n-1} b^{n-1} + \dots + d_0 b^0 + d_{-1} b^{-1} + \dots + d_{-m} b^{-m}$$

Ở đây các d_i thỏa mãn điều kiện $0 \leq d_i < b$ còn n là số lượng các chữ số bên trái, và m là số lượng các chữ số bên phải dấu phân chia phần nguyên và phần lẻ của số N . Có thể chứng minh được rằng với mỗi số tự nhiên N có và có duy nhất một cách biểu diễn N dưới dạng đa thức theo lũy thừa của b .

Ví dụ số 17 trong hệ đếm cơ số 3 có biểu diễn là 122 vì

$$17 = 1.3^2 + 2.3^1 + 2.3^0$$

Trong tin học người ta thường dùng một số hệ đếm sau đây:

- **Hệ đếm nhị phân** là hệ đếm cơ số 2 với hai chữ số là 0 và chữ số 1
- **Hệ đếm cơ số mười sáu** còn gọi là hệ Hexa. Hệ Hexa sử dụng các kí hiệu : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Trong các trường hợp cần thiết, để phân biệt số được biểu diễn ở hệ đếm nào người ta viết cơ số làm chỉ số cho số đó. Ví dụ. $101_2, 5_{16}$.

Sau đây là 16 số nguyên đầu tiên ở các hệ đếm 10, 2 và 16

Bảng 4.1. Biểu diễn của các số từ 0 tới 15 trong các hệ nhị phân và 16

Thập phân	Nhị phân	Hệ16	Thập phân	Nhị phân	Hệ16
0	0	0	8	1000	8
1	1	1	9	1001	9
2	10	2	10	1010	A
3	11	3	11	1011	B
4	100	4	12	1100	C
5	101	5	13	1101	D
6	110	6	14	1110	E
7	111	7	15	1111	F

4.2. Tìm biểu diễn số

4.2.1. Biến đổi số ở hệ đếm bất kỳ sang hệ đếm thập phân

Cho số N trong hệ đếm cơ số b :

$$N = (d_n d_{n-1} d_{n-2} \dots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} \dots d_{-m})_b$$

Trước hết xét trường hợp N là nguyên. Để tìm biểu diễn của số nguyên N trong hệ đếm thập phân, ta tiến hành các bước sau:

- Viết N dưới dạng đa thức của cơ số b :

$$N = d_n b^n + d_{n-1} b^{n-1} + d_{n-2} b^{n-2} + \dots + d_0$$

rồi tính giá trị của đa thức này. Để giảm số lượng phép tính khi tính giá trị của đa thức tốt hơn hết là tính theo sơ đồ Horner

$$N = d_0 + b(d_1 + b(d_2 + b(d_3 + \dots b d_n))) \dots$$

Trong trường hợp số có phần lẻ thì sơ đồ Horner mất hiệu lực, ta phải đổi phần lẻ

riêng rồi cộng lại. Ví dụ

$1110,101_2 = ?_{10}$. Thực hiện theo sơ đồ trên, ta có:

$$1110_2 = 0 + 2(1+2(1+2.1))) = 14$$

$$\text{Còn phần lẻ } 0,101_2 = 1.2^{-1} + 1.2^{-3} = 0.5 + 0.125 = 0.635$$

$$\text{Vậy } 1110,101_2 = 14.625_{10}$$

Một ví dụ khác.

$D3F,4_{16} = ?_{10}$. Cũng thực hiện như trên, ta có:

$$D3F_{16} = F + 16(3 + 16.D)$$

$$= 15 + 16(3 + 16.13)$$

$$= 3391$$

$$\text{Còn phần lẻ } 0,4 \text{ chính là } 4.16^{-1}$$

$$= 3328 + 48 + 15 + 0,25 = 3391,25$$

$$\text{Vậy, } D3F,4_{16} = 3391,25_{10}$$

4.2.2. Biến đổi số ở hệ đếm thập phân sang hệ đếm có cơ số bất kì

Trước hết ta tách phần nguyên và phần lẻ rồi tiến hành biến đổi chúng riêng biệt. Sau đó chúng ta sẽ ghép lại để có kết quả cần tìm.

Biến đổi số nguyên

Cho N là số tự nhiên. Ta viết N dưới dạng đa thức:

$$N = d_n b^n + d_{n-1} b^{n-1} + \dots + d_0$$

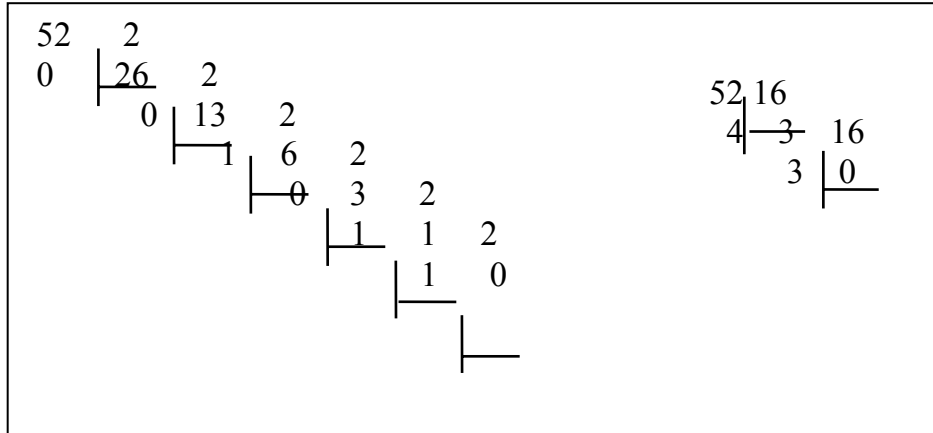
Nhận xét rằng, $0 \leq d_0 < b$. Do vậy, khi chia N cho b thì phần dư của phép chia đó là d_0 còn thương số $N1$ sẽ là:

$$N1 = d_n b^{n-1} + d_{n-1} b^{n-2} + \dots + d_1 \quad (2).$$

Tương tự, $d1$ chính là phần dư của phép chia $N1$ cho b . Gọi $N2$ là thương của phép chia ấy. Quá trình chia như vậy được thực hiện liên tiếp và ta sẽ lần lượt nhận được giá trị các d_i . Quá trình sẽ dừng lại khi nhận được thương số bằng 0. Để có biểu diễn cần tìm, các phần dư thu được cần sắp xếp theo thứ tự ngược lại.

Ví dụ. $52_{10} = ?_2 = ?_{16}$. Sơ đồ chia liên tiếp dưới đây minh họa quá trình thực hiện theo thuật toán nói trên.

Bảng 4.2. Đổi phần nguyên một số hệ 10 sang hệ 2 và sang hệ 16



Như vậy $52_{10} = 110100_2 = 34_{16}$

Biến đổi phần lẻ

Kí hiệu N' là phần lẻ (phần sau dấu phẩy thập phân) của số N . Giả sử N' được biểu diễn dưới dạng đa thức của cơ số b như sau:

$$N' = d_1 b^{-1} + d_2 b^{-2} + \dots + d_m b^{-m} \quad (1')$$

Nhân hai vế của (1') với b , ta thu được:

$$N1' = d_1 + d_2 b^{-1} + \dots + d_m b^{-(m-1)}$$

Ta nhận thấy, d_1 chính là phần nguyên của kết quả phép nhân. Còn phần lẻ của kết quả là:

$$N'2 = d_2 b^{-1} + \dots + d_m b^{-(m-1)} \quad (2')$$

Lặp lại phép nhân như trên đối với (2'), ta thu được d_2 là phần nguyên. Thực hiện liên tiếp phép nhân theo cách trên, cuối cùng thu được dãy $d_1 d_2 d_3 \dots d_m$: trong đó $0 \leq d_i < b$. Đó chính là giá trị của các chữ số trong biểu diễn cần tìm.

Ví dụ. $0,67875_{10} = ?_2$

Quá trình thực hiện được thể hiện như bảng dưới đây (nhân đôi cột bên phải để đẩy phần nguyên về cột số 1:

Bảng 4.3. Đổi một số lẻ sang hệ đếm cơ số 2

Phần nguyên	Phần lẻ
	67875 x 2 =
1	2575 x 2 =
0	515 x 2 =
1	03

	x 2 =
0	06
	x 2 =
0	12
	x 2 =
0	24
	x 2 =
0	48
	x 2 =
0	96
	x 2 =
1	92

Vậy $0,67875_{10} = 0,101000001..._2$

Ví dụ. $0,8435_{10} = ?_{16}$

Các bước tìm kết quả được thể hiện ở bảng dưới đây:

Bảng 4.4. Đổi một số lẻ sang hệ đếm cơ số 16

Phần nguyên	Phần lẻ
	8435
	x 16=
13	496
	x 16=
7	936
	x 16=
14	976
	x 16=
15	616

Lưu ý rằng trong hệ đếm cơ số 16 thì 13 thể hiện bằng chữ số D, 14 bằng E và 15 bằng F. Vậy $0,8435_{10} = 0.D7EF_{16}$

Quá trình trên trong một số trường hợp có thể kéo dài vô hạn. Tùy yêu cầu về độ chính xác cần thiết mà quyết định cần dừng ở bước nào. Như vậy kết quả của việc đổi một số có một số hữu hạn chữ số lẻ trong hệ đếm cơ số này có thể cho ra một số có vô hạn (tuần hoàn) chữ số lẻ trong hệ đếm cơ số khác.

4.2.3. Biến đổi số biểu diễn trong các hệ đếm đặc biệt

Về nguyên tắc có thể đổi bất cứ một biểu diễn số trong hệ đếm cơ số b1 bất kỳ sang một biểu diễn số trong một hệ đếm cơ số b2 bất kỳ khác. Điều rắc rối là ở chỗ ta phải nhớ được bảng nhân và bảng chia trong số học của các số biểu diễn trong cơ số b1 hoặc b2. Nếu không biết được bảng nhân và chia thì có thể ta phải đổi hai lần thông qua một hệ đếm trung gian mà ta đã biết bảng nhân và chia như hệ thập phân chẳng hạn. Khi đó để đổi một số x trong một hệ đếm cơ số b1 sang hệ đếm của cơ số b2 ta có thể đổi x

thành biểu diễn trong hệ thập phân rồi từ đó tìm biểu diễn của chúng trong hệ đếm cơ số b_2 .

Trong một số trường hợp đặc biệt khi b_1 và b_2 là lũy thừa của nhau thì có thể đổi một cách trực tiếp một cách dễ dàng. Nếu $b_1 = b_2^k$ thì trong hệ đếm cơ số b_2 , b_1 sẽ có biểu diễn là $100\dots00$ với k chữ số 0. Việc chia hay nhân một số với $100\dots00$ thực chất là tách từng nhóm k chữ số. Ví dụ có số 932452356 mà ta phải chia và tách phần dư liên tiếp với số chia là 100 thì kết quả sẽ là các nhóm số.

$$9 \mid 32 \mid 45 \mid 23 \mid 56$$

Ta áp dụng nhận xét này để đổi biểu diễn số giữa hệ đếm cơ số 2 và cơ số 16 là hai hệ đếm thường dùng trong tin học. Trong trường hợp này $16 = 2^4$.

Biến đổi số của hệ đếm nhị phân và hệ đếm cơ số 16

Quy tắc thực hành sau để đổi biểu diễn từ hệ nhị phân sang hệ 16 như sau:

Gộp các chữ số nhị phân thành từng nhóm bốn chữ số về hai phía kể từ vị trí phân cách phần nguyên và phần lẻ.

Thay mỗi nhóm 4 chữ số nhị phân bởi một chữ số tương ứng ở hệ đếm 16.

Ví dụ. $1011100101,11_2$. Ta gộp thành từng nhóm bốn chữ số nhị phân:

$$0010 \ 1110 \ 0101,1100_2$$

Thay tương ứng mỗi nhóm tương ứng bằng một chữ số hệ 16 (xem bảng tương ứng giữa các số hệ 2 hệ 10 và hệ 16 ở trên)

$$2 \ E \ 5, C_{16}$$

$$\text{Từ đó, } 1011100101,11_2 = 2E5,C_{16}$$

Để đổi ngược lại, số ở hệ 16 sang số ở hệ nhị phân ta chỉ cần thay từng chữ số ở hệ 16 thành nhóm 4 chữ số tương ứng ở hệ nhị phân.

$$\text{Ví dụ. } 3,D7EF_{16} = 11,1101 \ 0111 \ 1110 \ 1111_2$$

4.3. Số học nhị phân

Tương tự như số học thập phân, số học nhị phân cũng bao gồm 4 phép toán cơ bản : cộng, trừ, nhân, chia. Cách thực hiện các phép toán đó là tương tự như các phương pháp đã biết đối với số thập phân. Sau đây là bảng cộng và nhân các số 1 bit

Bảng 4.5. Bảng cộng và nhân trong hệ nhị phân

x	y	$x+y$	$x.y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	10	1

Bảng 4.6. cộng và nhân trong hệ đếm nhị phân

Phép cộng	Phép trừ
110011010	1010100011
+ 11001001	- 11001001
= 1001100011	= 111011010

Phép nhân trong hệ nhị phân rất đơn giản vì khi nhân với mỗi hàng của số nhân ta chỉ phải nhân với 1 hoặc 0, có nghĩa là sao lại số bị nhân hoặc dịch trái một vị trí. Phép chia cũng đơn giản vì khi ước lượng các chữ số ở thương ta chỉ phải chọn 1 trong 2 khả năng là 0 và 1

Bảng 4.7. Nhân và chia trong hệ đếm nhị phân

Phép nhân	Phép chia
1101	10000'01 1101
x 101	-1101 101
1101	00011 0
+ 0000	00011 01
1101	- 11 01
= 1000001	00000 00