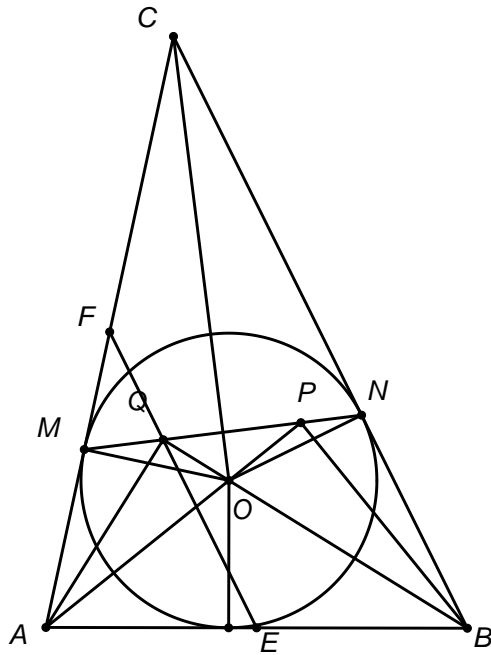


Câu	Đáp án	Điểm
<b>1. (3.0 điểm)</b>		
	Ta có $\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3} = (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{2b})^3 = (\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)$ .	0.75
	Suy ra $\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} = \frac{2(a+b) - \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{2b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)}$ $= \frac{a + \sqrt{2ab} + 2b}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}$ .	0.75
	$\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2b^3}}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{2b})(a - \sqrt{2ab} + 2b)}{\sqrt{2b}(\sqrt{2b} + \sqrt{a})} - \sqrt{a}$ $= \frac{a - \sqrt{2ab} + 2b}{\sqrt{2b}} - \sqrt{a} = \frac{a - 2\sqrt{2ab} + 2b}{\sqrt{2b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})^2}{\sqrt{2b}}$ .	0.75
	Từ đó, $P = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{2b}} \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})^2}{\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}{\sqrt{2b}}$ .	0.75
<b>2.1. (2.0 điểm)</b>		
	Theo định lí Viét ta có $x_1x_2 = x_3x_4 = 1, x_1 + x_2 = -2015$	0.5
	Do đó $M = x_1^2x_2 + (x_1 + x_2)x_3 + x_3^2x_4 - (x_1 + x_2)x_4 + x_4^2$	0.5
	$= (1 - 2015x_3 + x_3^2)(1 + 2015x_4 + x_4^2) = (-4031x_3)(-x_4) = 4031$ ( Vì $x_3^2 + 1 = -2016x_3; x_4^2 + 1 = -2016x_4$ )	1.0
<b>2.2. (2.0 điểm)</b>		
	Ta có $3x + 5y = 68 \hat{U} 3(x + 4) = 5(16 - y) \hat{P} 3(x + 4)$ chia hết cho 5 $\hat{P} x + 4 = 5k (k \hat{I} \phi) \hat{P} x = 5k - 4 (k \hat{I} \phi)$	0.5
	Mặt khác điểm $M(x; y)$ thuộc hình chữ nhật $ABCD$ (không nằm trên cạnh ) nên ta có $6 < x < 42 \hat{P} 3x = 68 - 5y < 58 \hat{P} x < \frac{58}{3} \hat{P} x \notin 19$ (Do $x \hat{I} \phi$ ) $2 < y < 17$	1.0
	Do đó $6 < 5k - 4 \notin 19 \hat{U} 2 < k < \frac{23}{5} \hat{P} \begin{cases} k = 3 \\ k = 4 \end{cases}$ ( Vì $k \hat{I} \phi$ )	
	Với $k = 3 \hat{P} (x; y) = (11; 7)$ ( Thỏa mãn ) Với $k = 4 \hat{P} (x; y) = (16; 4)$ ( Thỏa mãn ) Vậy các điểm cần tìm là $M(11; 7); M(16; 4)$ .	0.5

3.1. (2.0 điểm)		
<p>Ta sẽ chứng minh <math>\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{2a+b}</math> (1)</p> <p>Thật vậy</p> <p>(1) <math>\hat{=} (2b+a)(2a+b)^3 - 9ab \hat{=} 2a^2 - 4ab + 2b^2 \geq 0 \hat{=} 2(a-b)^2 \geq 0</math>, luôn đúng.</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi <math>a = b</math>.</p>	1.0	
<p>Ta lại có <math>(2a^2 + b^2)(2 + 1)^3 \geq (2a + b)^2</math> (2)</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi <math>a = b</math>.</p>	0.5	
<p>Do đó, <math>\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{2a+b} \geq \frac{9}{\sqrt{3(2a^2 + b^2)}} \geq \frac{3}{c}</math>.</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi <math>a = b = c</math>.</p>	0.5	
3.2. (2.0 điểm)		
<p><math>\frac{ab}{ca} = \frac{b}{c} \hat{=} c(10a + b) = b(10c + a) \hat{=} 2.5c(a - b) = b(a - c)</math>.</p> <p>Suy ra, 5 là ước của <math>b(a - c)</math>.</p> <p>Do 5 nguyên tố và <math>1 \nmid b \nmid 9; -8 \nmid a - c \nmid 8</math> nên hoặc <math>b = 5</math> hoặc <math>c - a = -5</math> hoặc <math>c - a = 5</math>.</p>	0.5	
<p>Nếu <math>b = 5</math> thì <math>2c(a - 5) = a - c \hat{=} 2c = \frac{2a}{2a - 9} \hat{=} 2c = 1 + \frac{9}{2a - 9}</math></p> <p>Vì <math>2c \geq 2 \nmid 2a - 9 &gt; 0</math> nên <math>(2a - 9) \in \{1; 3; 9\} \hat{=} a \in \{5; 6; 9\}</math> (<math>a = 5</math> loại).</p> <p>Với <math>a = 6 \nmid c = 2 \nmid (a; b; c) = (6; 5; 2)</math></p> <p>Với <math>a = 9 \nmid c = 1 \nmid (a; b; c) = (9; 5; 1)</math></p>	0.5	
<p>Nếu <math>a = c + 5</math> thì <math>2c(c + 5 - b) = b \hat{=} b = \frac{2c^2 + 10c}{2c + 1}</math></p> <p><math>\hat{=} 2b = \frac{4c^2 + 20c}{2c + 1} \hat{=} 2b = 2c + 9 - \frac{9}{2c + 1}</math></p> <p>Suy ra, <math>(2c + 1) \in \{1; 3; 9\} \hat{=} c \in \{0; 1; 4\}</math> (<math>c = 0</math> loại).</p> <p>Với <math>c = 1 \nmid a = 6; b = 4 \nmid (a; b; c) = (6; 4; 1)</math></p> <p>Với <math>c = 4 \nmid a = 9; b = 8 \nmid (a; b; c) = (9; 8; 4)</math></p>	0.5	
<p>Nếu <math>c = a + 5</math> thì <math>2(a + 5)(a - b) = -b \hat{=} b = \frac{2a^2 + 10a}{2a + 9}</math></p> <p><math>\nmid 2b = 2a + 1 - \frac{9}{2a + 9}</math></p> <p>Do <math>2a + 9 &gt; 9</math> nên <math>\frac{9}{2a + 9} \nmid \notin</math> (không thỏa mãn).</p> <p>Vậy các bộ số <math>(a; b; c)</math> thỏa mãn là <math>(6; 4; 1), (9; 8; 4), (6; 5; 2), (9; 5; 1)</math>.</p>	0.5	

**4.1. (2.0 điểm)**



Ta có

$$\widehat{BOP} = \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC})$$

$$\widehat{PNC} = 90^\circ - \widehat{NCO}$$

$$= \frac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC})$$

$$\text{Þ } \widehat{BOP} = \widehat{PNC}$$

Do đó, tứ giác BOPN nội tiếp.

1.0

Tương tự tứ giác AOQM nội tiếp

0.5

Do tứ giác AOQM nội tiếp Þ  $\widehat{AQO} = \widehat{AMO} = 90^\circ$

Tứ giác BOPN nội tiếp Þ  $\widehat{BPO} = \widehat{BNO} = 90^\circ$  Þ  $\widehat{AQB} = \widehat{APB} = 90^\circ$  Þ Tứ giác AQP B nội tiếp

0.5

**4.2. (2.0 điểm)**

Tam giác AQB vuông tại Q có QE là trung tuyến nên  $QE = EB = EA$ .

$$\text{Þ } \widehat{EQB} = \widehat{EBQ} = \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{QBC} \text{ Þ } QE \parallel BC.$$

1.0

Mà EF là đường trung bình của tam giác ABC nên  $EF \parallel BC$ .

Suy ra, Q, E, F thẳng hàng.

1.0

**4.3. (2.0 điểm)**

$$DMOP, DCOB \text{ đồng dạng Þ } \frac{MP}{a} = \frac{OM}{OC} = \frac{OP}{OB}$$

0.5

$$DNOQ \text{ và } DCOA \text{ đồng dạng Þ } \frac{NQ}{b} = \frac{ON}{OC} = \frac{OM}{OC}$$

0.5

$$DPOQ \text{ và } DBOA \text{ đồng dạng Þ } \frac{PQ}{c} = \frac{OP}{OB} = \frac{OM}{OC}$$

0.5

$$\text{Þ } \frac{OM}{OC} = \frac{MP}{a} = \frac{NQ}{b} = \frac{PQ}{c} = \frac{MP + NQ + PQ}{a + b + c}$$

0.5

**5.1. (1.5 điểm)**

Gọi A là 1 trong 4033 điểm đã cho. Vẽ đường tròn tâm A bán kính là 1. Kí hiệu (A, 1).

+) Nếu tất cả 4032 điểm còn lại đều nằm trong đường tròn này thì bài toán được giải quyết.

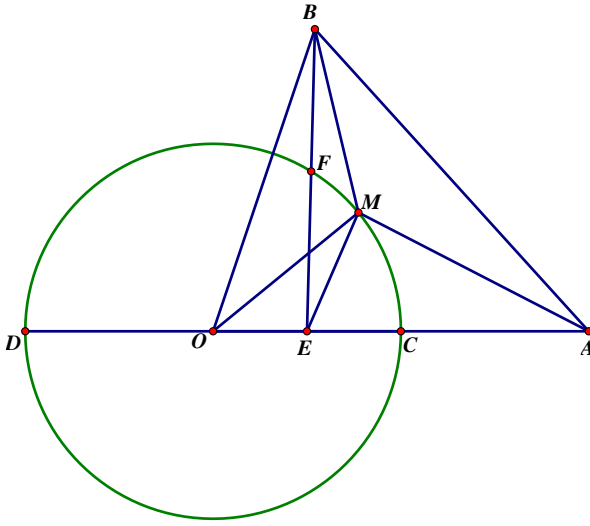
0.5

+) Giả sử B nằm ngoài đường tròn (A, 1). Khi đó,  $AB > 1$ , vẽ đường tròn tâm B bán kính bằng 1, kí hiệu là (B, 1). Gọi C là điểm thứ 3 trong 4031 điểm còn lại. Do A, B, C là ba điểm bất kì và  $AB > 1$  nên theo giả thiết hoặc  $AC < 1$  hoặc  $BC < 1$ . Nên C nằm trong (A, 1) hoặc (B, 1) do đó, hai hình tròn (A, 1) và (B, 1) chứa tất cả 4033 điểm đã cho.

Mà  $4033 = 2.2016 + 1$ , nên theo nguyên lí Dirichlet một trong hai đường tròn này chứa 2016 điểm.

1.0

**5.2. (1.5 điểm)**



Đường thẳng  $OA$  cắt  $(O)$  tại  $C, D$  với  $C$  là trung điểm của  $OA$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $OC$ .

Nếu  $M$  không trùng với  $C, D$  thì  $\triangle DOE$  và  $\triangle OMA$  đồng dạng

$$\frac{OE}{OM} = \frac{OM}{OA}, \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} = \frac{OE}{OM}$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{AM} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2EM.$$

0.5

Nếu  $M$  trùng với  $C$  thì  $MA = CA = 2EC = 2EM$ .

Nếu  $M$  trùng với  $D$  thì  $MA = DA = 2ED = 2EM$ .

Vậy ta luôn có  $MA = 2EM$ .

0.5

Do đó,  $MA + 2MB = 2EM + 2MB \geq 2EB$  là hằng số.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $M$  là giao điểm của  $BE$  với  $(O)$ .

Vậy  $MA + 2MB$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $M$  là giao điểm của  $BE$  với  $(O)$ .

0.5

**Chú ý:**

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. HS trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của HS ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thì giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.
3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----**Hết**-----