BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC CẦN THƠ

NGUYỄN THỊ THẢO TRÚC

XẤP XỈ TUYẾN TÍNH VÀ ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

CHUYÊN NGÀNH TOÁN GIẢI TÍCH
MÃ SỐ: 60.46.01

Người hướng dẫn khoa học:

1. TS. NGUYỄN THÀNH LONG
2. TS. NGUYỄN CÔNG TÂM

THÀNH PHỐ CẦN THƠ
03-2003

Luận văn được hoàn thành tại:
Trường Đại học Cần Thơ.

Người hướng dẫn khoa học:

1. TS. Nguyễn Thành Long
2. TS. Nguyễn Công Tâm
Khoa Toán- tin học,
Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.

Người nhận xét 1 : **TS. Đinh Ngọc Thanh**

Khoa Toán- tin học,
Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.

Người nhận xét 2 : **TS. Đặng Đức Trọng**

Khoa Toán- tin học,
Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.

Học viên cao học: **Nguyễn Thị Thảo Trúc**

Bộ môn Toán- Khoa Sư phạm,
Trường Đại học Cần Thơ.

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội Đồng chấm luận án cấp Trường tại Trường Đại học Cần Thơ, vào lúc ......giờ, ngày 19 tháng 4 năm 2003.

Có thể tìm hiểu luận văn tại Phòng Sau Đại học, thư viện Trường Đại Học Cần Thơ.

THÀNH PHỐ CẦN THƠ
3- 2003

Lời đầu tiên, tôi xin kính gởi đến Thầy Nguyễn Thành Long và Thầy Nguyễn Cong Tam lời cảm ơn sâu sắc nhất về sự giúp đỡ của quý Thầy trong việc hoàn thành luận văn này.

Chân thành cảm ơn Thầy Đinh Ngoc Thanh và Thầy Đang Đưc Trọng, đọc cẩn thận luận văn của tôi và cho tôi nhiều nhận xét bổ ích.

Xin chân thành cảm ơn quý Thầy Co Khoa Toán- Tin học Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Thành Phố Hồ Chí Minh đã tận tình giảng dạy tôi trong suốt khóa học.

Xin cảm ơn quý Thầy Co thuộc Khoa Sư Phạm - Trường Đại Học Cần Thơ nói chung, quý Thầy Co Bộ môn Toán- Khoa Sư Phạm nói riêng đã trang bị cho tôi kiến thức nền tảng và luôn động viên giúp đỡ tôi trong thời gian qua.

Xin cảm ơn quý Thầy Co thuộc Phòng quản lý Khoa học và đào tạo Sau Đại học Trường Đại Học Cần Thơ đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành chương trình học.

Cảm ơn các Bạn hoc vien lớp cao học Khoá 7 đã hỗ trợ cho tôi nhiều mặt trong thời gian học.

Lời thân thương nhất xin được gởi đến gia đình tôi, nơi đã tạo cho tôi mọi điều kiện thuận lợi để học tập và hoàn thành luận văn này.

Nguyễn Thị Thảo Trúc

MỤC LỤC

PHẦN MỞ ĐẦU

Trong luận văn này, chúng tôi khảo sát phương trình sóng phi tuyến một chiều liên kết với điều kiện biên không thuần nhất. Chúng tôi thu được nghiệm bằng cách thiết lập một dãy qui nạp hội tụ mạnh trong các không gian hàm thích hợp. Một số tính chất về khai triển tiệm cận của nghiệm theo tham số bé cũng được khảo sát sau đó.

Trong luận văn này, chúng tôi xét phương trình sóng phi tuyến sau đây.

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t),\ x \in \Omega = (0,1),\ 0 < t < T, \tag{0.1}$$

liên kết với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất

$$u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = g_0(t),\ u(1,t) = g_1(t), \tag{0.2}$$

và điều kiện đầu

$$u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \tag{0.3}$$

trong đó h_0 là hằng số không âm cho trước và $f,\ g_0,\ g_1,\ \tilde{u}_0,\ \tilde{u}_1$ là các hàm cho trước.

Phương trình (0.1) với các dạng khác nhau của f và các điều kiện khác nhau đã được khảo sát bởi nhiều tác giả. Cụ thể là một số trường hợp sau:

Trong [5] Ficken và Fleishman đã thiết lập sự tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục và tính ổn định của nghiệm này cho phương trình

$$u_{tt} - u_{xx} - 2\alpha_1 u_t - \alpha_2 u = \varepsilon u^3 + b,\quad \varepsilon > 0 \text{ bé}. \tag{0.4}$$

Trong [12] Rabinowitz đã chứng minh sự tồn tại của nghiệm tuần hoàn cho phương trình

$$u_{tt} - u_{xx} + 2\alpha_1 u_t = \varepsilon f(x,t,u,u_x,u_t), \tag{0.5}$$

trong đó ε là tham số bé và f tuần hoàn theo thời gian.

Trong [2] Caughey và Ellison đã hợp nhất các trường hợp trước đó để bàn về sự tồn tại duy nhất và ổn định tiệm cận của các nghiệm cổ điển cho một lớp các hệ động lực liên tục phi tuyến.

Trong [3] Alain Phạm Ngọc Định đã chứng minh sự tồn tại và duy nhất của một nghiệm yếu của bài toán (0.1), (0.3) liên kết với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{0.6}$$

với số hạng phi tuyến trong (0.1) có dạng

$$f = \varepsilon\, f(t,u). \tag{0.7}$$

Bằng sự tổng quát của [4] Alain Phạm Ngọc Định và Nguyễn Thành Long đã xét bài toán (0.1), (0.3), (0.6) với số hạng phi tuyến có dạng

$$f = f(t,u,u_t), \tag{0.8}$$

Trong [7], [8] Alain Phạm Ngọc Định và Nguyễn Thành Long đã nghiên cứu bài toán (0.1), (0.3) với số hạng phi tuyến có dạng

$$f = f(u,u_t). \tag{0.9}$$

Trong [7] các tác giả đã xét bài toán với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất

$$u_x(0,t) = h\,u(0,t) + g(t), \quad u(1,t) = 0, \tag{0.10}$$

trong đó $h > 0$ là hằng số cho trước; trong [8] với điều kiện biên được xét tổng quát hơn

$$u_x(0,t) = g(t) + h\,u(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \quad u(1,t) = 0. \tag{0.11}$$

Trong [9] Nguyễn Thành Long và Trần Ngọc Diễm đã xét bài toán (0.1), (0.3) với trường hợp

$$u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = u_x(1,t) + h_1 u(1,t) = 0, \tag{0.12}$$

trong đó h_0, h_1 là hằng số không âm cho trước với $h_0 + h_1 > 0$.

Trong phần thứ nhất (chương 2) chúng tôi liên kết với phương trình (0.1) một dãy qui nạp tuyến tính bị chặn trong một không gian hàm thích hợp. Sự tồn tại nghiệm của (0.1), (0.2), (0.3), (0,12) được chứng minh bằng phương pháp Galerkin và compat yếu. Chú ý rằng phương pháp tuyến tính hóa trong các bài báo [4, 9] không dùng được trong các bài báo [7, 8].

Phần thứ hai (chương 3 và 4) chúng tôi nghiên cứu các khai triển tiệm cận của nghiệm theo một tham số nhiễu ε cho bài toán sau:

$$(P_\varepsilon)\quad \begin{cases} u_{\varepsilon tt} - \Delta u_\varepsilon = f(x,t,u_\varepsilon,u_{\varepsilon x},u_{\varepsilon t}) \\ \qquad\qquad + \varepsilon f_1(x,t,u_\varepsilon,u_{\varepsilon x},u_{\varepsilon t}), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_{\varepsilon x}(0,t) - h_0 u_\varepsilon(0,t) = g_0(t),\ u_\varepsilon(1,t) = g_1(t), \\ u_\varepsilon(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_{\varepsilon t}(x,0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases}$$

Nếu các hàm số $f \in C^3([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$, $f_1 \in C^2([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$ và một số điều kiện phụ, thì nghiệm u_ε của bài toán (P_ε) có một khai triển tiệm cận đến cấp 3 theo ε, với ε đủ nhỏ. Trong trường hợp $f \equiv 0, f_1 = f_1(u)$ với $f_1 \in C^N(IR)$, chúng tôi thiết lập kết quả khai triển tiệm cận của nghiệm đến cấp $N+1$ theo ε (chương 4). Các kết quả trên đã tổng quát hóa tương đối của [1, 3, 4, 9 -11].

Toàn bộ luận văn này sẽ chia thành các chương mục sau đây:

Phần mở đầu nhằm giới thiệu tổng quát về bài toán và nêu ra các kết quả trước đó, đồng thời giới thiệu tóm tắt các chương tiếp theo.

Chương 1 giới thiệu một số kiến thức chuẩn bị, các ký hiệu và các không gian hàm thông dụng. Một số kết quả về phép nhúng cũng được nhắc lại ở đây.

Chương 2 chúng tôi khảo sát bài toán (0.1) – (0.3), kết quả chính của chương này là chứng minh một định lý tồn tại và duy nhất nghiệm yếu trong trường hợp $f \in C^1([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$, $\tilde{u}_0 \in H^2(0,1)$, $g_0, g_1 \in C^3(IR_+)$, với hằng số $h_0 \geq 0$. Phương pháp sử dụng là xây dựng một dãy qui nạp tuyến tính hội tụ mạnh. Kết quả này đã tổng quát kết quả trong [1, 3, 4, 9 - 11] và chuẩn bị công bố.

Chương 3 là phần nghiên cứu về khai triển tiệm cận theo một tham số bé ε đến một cấp thích hợp cho nghiệm bài toán (0.1), (0.2), (0.3) với số hạng phi tuyến *f* có dạng sau:

$$f(x,t,u,u_x,u_t) = f(x,t,u,u_x,u_t) + \varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t), \tag{0.13}$$

trong đó f, $f_1 \in C^1([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$ có tính trơn thích hợp.

Chương 4 là phần nghiên cứu về khai triển tiệm cận cho một bài toán (0.1), (0.2), (0.3) cụ thể với $f = \varepsilon u^2$.

Kết quả này đã tổng quát tương đối các kết quả trong [1, 3, 4, 9 - 11] và chuẩn bị công bố.

Phần cuối cùng là kết luận về các kết quả thu được trong luận văn. Sau cùng là phần tài liệu tham khảo.

CHƯƠNG 1
MỘT SỐ CÔNG CỤ CHUẨN BỊ

1.1. Các ký hiệu về không gian hàm

Chúng ta bỏ qua định nghĩa các không gian hàm thông dụng và sử dụng các ký hiệu gọn lại như sau:

$$L^p = L^p(\Omega), \quad H^m = H^m(\Omega), \quad H_0^m = H_0^m(\Omega),$$
$$\Omega = (0,1), \quad Q_T = \Omega \times (0,T) = (0,1)\times(0,T), \quad T > 0.$$

Các ký hiệu $\langle \cdot,\cdot \rangle$ và $\|.\|$ dùng để chỉ tích vô hướng và chuẩn sinh bởi tích vô hướng tương ứng trên L^2. Ký hiệu $\langle \cdot,\cdot \rangle$ cũng dùng để chỉ cặp tích đối ngẫu giữa phiếm hàm tuyến tính liên tục và một phần tử trong không gian hàm nào đó nằm trong L^2. Ta ký hiệu $\|.\|_X$ là chuẩn trên không gian Banach X. Gọi X' là đối ngẫu của X.

Ta ký hiệu $L^p(0,T;X), 1 \le p \le \infty$ là không gian Banach các hàm $u:(0,T) \to X$, đo được sao cho

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty, \quad \text{với } 1 \le p < \infty,$$

và

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_X, \quad \text{với } p = \infty.$$

Ta viết $u(t),\ u_t(t) = \dot{u}(t),\ u_{tt}(t) = \ddot{u}(t),\ u_x(t) = \nabla u(t)$ lần lượt thay cho

$$u(x,t),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

theo thứ tự.

1.2. Các bổ đề quan trọng

Cho ba không gian Banach B_0, B, B_1 với $B_0 \subset B \subset B_1$,

B_0, B_1 phản xạ, (1.1)

$B_0 \hookrightarrow B$ với phép nhúng compact. (1.2)

Ta định nghĩa:

$$W = \{v \in L^{p_0}(0,T;B_0) : \frac{dv}{dt} = v' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

trong đó $0 < T < \infty,\ 1 \le p_i \le \infty,\ i = 0,1$.

Trang bị trên W một chuẩn như sau:

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Khi đó W là không gian Banach. Hiển nhiên $W \subset L^{p_0}(0,T;B)$.

Ta có kết quả sau:

Bổ đề 1.1 ([6], p.57)

Dưới giả thiết (1.1), (1.2) *và nếu* $1 < p_i < \infty,\ i = 0,1,$ *thì phép nhúng* $W \hookrightarrow L^{p_0}(0,T;B)$ *là compact.*

Bổ đề 1.2 ([6], p.12)

Cho Q *là mở bị chặn của* IR^N, $g, g_m \in L^q(Q), 1 < q < \infty$ *thỏa*

(i) $\|g_m\|_{L^q(Q)} \le C,$ *với mọi* m,

(ii) $g_m \to g$ *hầu hết trong* Q.

Khi đó $g_m \to g$ *trong* $L^q(Q)$ *yếu.*

Sau cùng, chúng tôi trình bày một kết quả về lý thuyết phổ được áp dụng trong nhiều bài toán biên.

Trước hết ta làm một số giả thiết sau:

Cho V và H là hai không gian Hilbert thực thỏa các điều kiện (1.3)

(i) Phép nhúng $V \hookrightarrow H$ là compact,

(ii) V trù mật trong H.

Cho $a: V \times V \to IR$ là một dạng song tuyến tính đối xứng, liên tục trên $V \times V$ và cưỡng bức trên V. (1.4)

Chính xác hơn, ta gọi a là một dạng song tuyến tính:

(j) Nếu $u \mapsto a(u,v)$ tuyến tính từ V vào IR với mọi $v \in V$, và $v \mapsto a(u,v)$ tuyến tính từ V vào IR với mọi $u \in V$.

(jj) Đối xứng nếu $a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in V$.

(jjj) Liên tục nếu $\exists M \geq 0: \ |a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u,v \in V$.

(4j) Cưỡng bức nếu $\exists \alpha > 0: a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$.

Khi đó ta có kết quả sau:

Bổ đề 1.3 ([13], Định lý 6.2.1, p.137)

Dưới giả thiết (1.3), (1.4). *Khi đó, tồn tại một cơ sở trực chuẩn Hilbert* $\{w_j\}$ *của* H *gồm các hàm riêng* w_j *tương ứng với giá trị riêng* λ_j *sao cho*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_j \leq ..., \quad \lim_{j\to\infty} \lambda_j = +\infty, \tag{1.5}$$

$$a(\widetilde{w}_j, v) = \lambda_j \langle \widetilde{w}_j, v\rangle \quad \forall v \in V, \ \ \forall j = 1,2... \tag{1.6}$$

Hơn nữa, dãy $\{\widetilde{w}_j / \sqrt{\lambda_j}\}$ *cũng là một cơ sở trực chuẩn Hilbert của* V *đối với tích vô hướng* $a(\cdot,\cdot)$.

Chứng minh bổ đề 1.3 có thể tìm thấy trong [13, Định lý 6.2.1, p.137].

CHƯƠNG 2

KHẢO SÁT PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN LIÊN KẾT VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN HỖN HỢP

2.1. Giới thiệu

Trong chương 2, chúng tôi xét bài toán giá trị biên và ban đầu sau đây:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \tag{2.1}$$

$$u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = g_0(t), u(1,t) = g_1(t), \tag{2.2}$$

$$u_x(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \tag{2.3}$$

trong đó h_0 là hằng số không âm cho trước; g_0, g_1, $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ là các hàm cho trước, số hạng phi tuyến f cũng là hàm cho trước thuộc lớp $C^1([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$ thỏa một số điều kiện nào đó mà ta sẽ chỉ ra sau.

Trong chương này, ta sẽ thiết lập một định lý tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán (2.1)-(2.3) bằng phương pháp xấp xỉ tuyến tính kết hợp với phương pháp Galerkin và phương pháp compact yếu. Kết quả thu được ở đây là sự tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [3, 4, 9-11] và chuẩn bị được công bố.

Trước hết chúng ta đặt:

$$V = \{v \in H^1(0,1) : v(1) = 0\}, \tag{2.4}$$

và một dạng song tuyến tính trên $V \times V$

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx + h_0 u(0) v(0). \tag{2.5}$$

V là một không gian con đóng của H^1, do đó cũng là một không gian Hilbert đối với tích vô hướng của H^1.

Khi đó ta có các bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.1

Cho $h_0 \geq 0$. *Khi đó phép nhúng* $V \hookrightarrow C^0([0,1])$ *là compact và*

$$\begin{aligned} &\|v\|_{C^0([0,1])} \leq \|v'\| \leq \|v\|_V, \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|_{H^1} \leq \|v'\| \leq \|v\|_V \leq \max\{1,\sqrt{h_0}\}\,\|v\|_{H^1}, \quad \text{với mọi } v \in V. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Bổ đề 2.2

Cho $h_0 \geq 0$. *Khi đó dạng song tuyến tính đối xứng* $a(\cdot,\cdot)$ *được xác định bởi* (2.5), *liên tục trên* $V \times V$ *và cưỡng bức trên* V.

Các bổ đề 2.1, 2.2 là kết quả quen thuộc mà chứng minh của nó có thể tìm thấy trong nhiều tài liệu liên quan đến lý thuyết về không gian Sobolev, chẳng hạn [6].

Chú thích 2.1

Ta suy từ (2.6) rằng, trên V cả ba chuẩn $\|v\|_{H^1}$, $\|v'\|$ và $\|v\|_V = \sqrt{a(v,v)}$ là tương đương.

Bổ đề 2.3

Cho $h_0 \geq 0$. *Khi đó tồn tại một cơ sở trực chuẩn Hilbert* $\{\tilde{w}_j\}$ *của* L^2 *gồm các hàm riêng* $\tilde{w}_j$ *tương ứng với giá trị riêng* λ_j *sao cho*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j \leq \ldots, \quad \lim_{j \to +\infty} \lambda_j = +\infty, \tag{2.7}$$

$$a(\tilde{w}_j, v) = \lambda_j \langle \tilde{w}_j, v \rangle \quad \forall v \in V,\ \forall j = 1,2\ldots \tag{2.8}$$

Hơn nữa, dãy $\{\tilde{w}_j/\sqrt{\lambda_j}\}$ *cũng là một cơ sở trực chuẩn Hilbert của* V *đối với tích vô hướng* $a(\cdot,\cdot)$.

Mặt khác, ta cũng có $\tilde{w}_j$ thỏa bài toán biên dưới đây

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{w}_j = \lambda_j \widetilde{w}_j, \quad trong\ (0,1), \\ \widetilde{w}_{jx}(0) - h_0\widetilde{w}_j(0) = \widetilde{w}_j(1) = 0, \\ \widetilde{w}_j \in V \cap C^\infty([0,1]). \end{cases} \tag{2.9}$$

Chứng minh của bổ đề này được suy từ bổ đề 1.3, với $H = L^2$, và V, $a(\cdot,\cdot)$ được xác định bởi (2.4), (2.5).

2.2. Thuật giải xấp xỉ tuyến tính

Ta thành lập các giả thiết sau

(H_1) $h_0 \geq 0$;

(H_2) $g_0,\ g_1 \in C^3(IR_+)$;

(H_3) $\widetilde{u}_0 \in V \cap H^2$, $\widetilde{u}_1 \in V$;

(H_4) $f \in C^1([0,1]\times IR_+ \times IR^3)$ thỏa các điều kiện sau

$f(1,t,u,v,w) = 0$ với mọi $t \geq 0$ và $(u,v,w) \in IR^3$.

Thay vì xét bài toán (2.1)-(2.2), ta sẽ xét đưa nó về một bài toán với điều kiện biên thuần nhất như sau:

Đặt

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{1+h_0}(x-1)g_0(t) + e^{h_0(x-1)}g_1(t),\ \ x\in[0,1],\ t\geq 0. \tag{2.10}$$

Khi đó phép đổi biến

$$v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x,t), \tag{2.11}$$

ta có v thỏa mãn phương trình

$$v_{tt} - v_{xx} = \widetilde{f}(x,t,v,v_x,v_t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \tag{2.12}$$

với điều kiện biên hỗn hợp thuần nhất

$$v_x(0,t) - h_0 v(0,t) = v(1,t) = 0, \tag{2.13}$$

và điều kiện đầu

$$v(x,0) = \widetilde{v}_0(x),\ v_t(x,0) = \widetilde{v}_1(x), \tag{2.14}$$

trong đó

$$\widetilde{f}(x,t,v,v_x,v_t) = f(x,t,v+\varphi,v_x+\varphi_x,v_t+\varphi_t)+\varphi_{xx}-\varphi_{tt}, \tag{2.15}$$

$$\widetilde{v}_0(x) = \widetilde{u}_0(x)-\varphi(x,0),\ \ \widetilde{v}_1(x) = \widetilde{u}_1(x)-\varphi_t(x,0), \tag{2.16}$$

cùng với điều kiện nhất quán

$$\begin{aligned} &g_0(0) = u_x(0,0)-h_0u(0,0) = \ \widetilde{u}_0^{/}(0)-h_0\widetilde{u}_0(0), \\ &g_1(0) = u(1,0) \ = \ \widetilde{u}_0(1). \end{aligned} \tag{2.17}$$

thỏa

$$\widetilde{f} \in C^1([0,1]\times IR_+\times IR^3),\ \widetilde{v}_0 \in V\cap H^2,\ \ \widetilde{v}_1 \in V.$$

Vậy với phép đổi ẩn hàm (2.10), (2.11), bài toán (2.1)-(2.3) với điều kiện biên không thuần nhất tương đương với bài toán với điều kiện biên thuần nhất (2.12)-(2.14).

Cho trước $M>0,\ T>0,$ ta đặt

$$K_0 = K_0(M,T,\widetilde{f}) = \sup\{\left|\widetilde{f}(x,t,u,v,w)\right| : (x,t,u,v,w)\in\widetilde{A}\}, \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= K_1(M,T,\widetilde{f}) \\ &= \sup\{(\left|\widetilde{f}_x^{/}\right|+\left|\widetilde{f}_u^{/}\right|+\left|\widetilde{f}_v^{/}\right|+\left|\widetilde{f}_w^{/}\right|)(x,t,u,v,w) : (x,t,u,v,w)\in\widetilde{A}\}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

trong đó $\widetilde{A} = \{(x,t,u,v,w)\in IR^5 : 0\le t\le T,\ \ 0\le x\le 1,\ |u|+|v|+|w|\le M\}.$ (2.20)

Với mọi $M>0$ và $T>0,$ ta đặt

$$\begin{aligned} W(M,T) = \{v\in L^\infty(0,T;V\cap H^2) &: v_t\in L^\infty(0,T;V), v_{tt}\in L^2(Q_T), \\ &\|v\|_{L^\infty(0,T;V\cap H^2)}, \|v_t\|_{L^\infty(0,T;V)}, \|v_{tt}\|_{L^2(Q_T)} \le M\}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$W_1(M,T) = \{v\in W(M,T) : v_{tt}\in L^\infty(0,T;L^2)\}, \tag{2.22}$$

trong đó $Q_T = (0,1)\times(0,T).$

Tiếp theo, ta xây dựng dãy $\{v_m\}$ trong $W_1(M,T)$ bằng qui nạp và chứng minh nó hội tụ về nghiệm của bài toán (2.1)-(2.3) với sự chọn lựa $M>0$ và $T>0.$ Ta xét thuật giải xấp xỉ tuyến tính sau:

Chọn số hạng ban đầu: $v_0 \in W_1(M,T)$. Giả sử rằng:

$$v_{m-1} \in W_1(M,T). \tag{2.23}$$

Ta liên kết bài toán (2.12)-(2.14) với toán biến phân tuyến tính sau:

Tìm $v_m \in W_1(M,T)$ thỏa bài toán biến phân tuyến tính sau:

$$\langle \ddot{v}_m(t), w\rangle + a(v_m(t), w) = \langle F_m(t), w\rangle \quad \forall w \in V, \tag{2.24}$$

$$v_m(0) = \widetilde{v}_0, \dot{v}_m(0) = \widetilde{v}_1, \tag{2.25}$$

trong đó

$$F_m(x,t) = \widetilde{f}(x,t,v_{m-1}(t), \nabla v_{m-1}(t), \dot{v}_{m-1}(t)). \tag{2.26}$$

Sự tồn tại của v_m cho bởi định lý sau đây.

Định lý 2.1

Giả sử $(H_1)-(H_4)$ là đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số dương M,T và một dãy qui nạp tuyến tính $\{v_m\} \subset W_1(M,T)$ xác định bởi (2.24)-(2.26).

Chứng minh. Gồm các bước sau đây:

Bước 1. Xấp xỉ *Galerkin*.

Xét một cơ sở $\{w_j\}$ của V như bổ đề 2.3, với $w_j = \widetilde{w}_j / \sqrt{\lambda_j}$. Đặt

$$v_m^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{k} c_{mj}^{(k)}(t) w_j \tag{2.27}$$

trong đó $c_{mj}^{(k)}(t)$ thỏa các hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\langle \ddot{v}_m^{(k)}(t), w_j\rangle + a(v_m^{(k)}(t), w_j) = \langle F_m(t), w_j\rangle, \quad 1 \le j \le k, \tag{2.28}$$

$$v_m^{(k)}(0) = \widetilde{v}_{0k}, \dot{v}_m^{(k)}(0) = \widetilde{v}_{1k}, \tag{2.29}$$

trong đó

$$\widetilde{v}_{0k} \equiv \sum_{j=1}^{k} \alpha_{mj}^{(k)} w_j \to \widetilde{v}_0 \qquad \text{mạnh trong } V \cap H^2, \tag{2.30}$$

$$\tilde{v}_{1k} \equiv \sum_{j=1}^{k} \beta_{mj}^{(k)} w_j \ \to \tilde{v}_1 \qquad \text{mạnh trong } V. \tag{2.31}$$

Giả sử rằng v_{m-1} thỏa (2.23). Khi đó, ta dễ dàng suy ra rằng hệ phương trình vi phân (2.28), (2.29) có nghiệm duy nhất $v_m^{(k)}(t)$ trên một khoảng $0 \le t \le T_m^{(k)} \le T$. Các đánh giá tiên nghiệm sau đây cho phép ta lấy $T_m^{(k)} = T$, với mọi m và k.

<u>Bước 2</u>*. *Đánh giá tiên nghiệm.

Đặt

$$S_m^{(k)}(t) = X_m^{(k)}(t) + Y_m^{(k)}(t) + \int_0^t \left\| \ddot{v}_m^{(k)}(s) \right\|^2 ds, \tag{2.32}$$

trong đó

$$X_m^{(k)}(t) = \left\| \dot{v}_m^{(k)}(t) \right\|^2 + a(v_m^{(k)}(t), v_m^{(k)}(t)), \tag{2.33}$$

$$Y_m^{(k)}(t) = a(\dot{v}_m^{(k)}(t), \dot{v}_m^{(k)}(t)) + \left\| \Delta v_m^{(k)}(t) \right\|^2. \tag{2.34}$$

Khi đó, ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.4.

$$\begin{aligned} S_m^{(k)}(t) &= S_m^{(k)}(0) + 2F_m(1,0)\nabla \tilde{v}_{0k}(1) \\ &\quad + 2\int_0^t \langle F_m(s), \dot{v}_m^{(k)}(s) \rangle ds + 2\int_0^t a(F_m(s), \dot{v}_m^{(k)}(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t \left\| \ddot{v}_m^{(k)}(s) \right\|^2 ds + 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(F_m(1,s)) \nabla v_m^{(k)}(1,s) ds \\ &\quad - 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(F_m(1,s)) ds . \nabla v_m^{(k)}(1,t) - 2F_m(1,0)\nabla v_m^{(k)}(1,t). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Chứng minh bổ đề 2.4.

Nhân (2.28) bởi $\dot{c}_{mj}^{(k)}(t)$, sau đó lấy tổng theo j, ta được

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}X_m^{(k)}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\left\|\dot{v}_m^{(k)}(t)\right\|^2 + a(v_m^{(k)}(t), v_m^{(k)}(t))] = \langle F_m(t), \dot{v}_m^{(k)}(t)\rangle.$$

Tích phân theo t ta được

$$X_m^{(k)}(t) = X_m^{(k)}(0) + 2\int_0^t \langle F_m(s), \dot{v}_m^{(k)}(s)\rangle ds. \tag{2.36}$$

Trong (2.28) thay $w_j = \frac{-1}{\lambda_j}\Delta w_j$, sau đó đơn giản λ_j, ta được

$$\langle \ddot{v}_m^{(k)}(t), -\Delta w_j\rangle + a(v_m^{(k)}(t), -\Delta w_j) = \langle F_m(t), -\Delta w_j\rangle. \tag{2.37}$$

Chú ý rằng các công thức sau đây là đúng

$$\langle \ddot{v}_m^{(k)}(t), -\Delta w_j\rangle = a(\ddot{v}_m^{(k)}(t), w_j), \tag{2.38}$$

$$a(v_m^{(k)}(t), -\Delta w_j) = \langle \Delta v_m^{(k)}(t), \Delta w_j\rangle, \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\langle F_m(t), -\Delta w_j\rangle &= -\int_0^1 F_m(x,t)\Delta w_j(x)dx \\ &= -F_m(1,t)\nabla w_j(1) + h_0 w_j(0) + \int_0^1 \nabla F_m(x,t)\nabla w_j(x)dx \quad (2.40) \\ &= -F_m(1,t)\nabla w_j(1) + a(F_m(t), w_j).\end{aligned}$$

Vậy, nhờ vào (2.38)- (2.40), ta viết lại (2.37) như sau:

$$a(\ddot{v}_m^{(k)}(t), w_j) + \langle \Delta v_m^{(k)}(t), \Delta w_j\rangle = a(F_m(t), w_j) - F_m(1,t)\nabla w_j(1). \tag{2.41}$$

Trong (2.41) thay w_j bởi $\dot{v}_m^{(k)}(t)$, ta được

$$\begin{aligned}&a(\ddot{v}_m^{(k)}(t), \dot{v}_m^{(k)}(t)) + \langle \Delta v_m^{(k)}(t), \Delta \dot{v}_m^{(k)}(t)\rangle \\ &\qquad = a(F_m(t), \dot{v}_m^{(k)}(t)) - F_m(1,t)\nabla \dot{v}_m^{(k)}(1,t).\end{aligned} \tag{2.42}$$

hay

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}Y_m^{(k)}(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[a(\dot{v}_m^{(k)}(t), \dot{v}_m^{(k)}(t)) + \left\|\Delta v_m^{(k)}(t)\right\|^2] \\ &= a(F_m(t), \dot{v}_m^{(k)}(t)) - F_m(1,t)\nabla \dot{v}_m^{(k)}(1,t).\end{aligned} \tag{2.43}$$

Tích phân theo t, ta được

$$Y_m^{(k)}(t) = Y_m^{(k)}(0) + 2\int_0^t a(F_m(s), \dot{v}_m^{(k)}(s))ds - 2\int_0^t F_m(1,s)\nabla\dot{v}_m^{(k)}(1,s)ds. \quad (2.44)$$

Viết lại tích phân cuối cùng của vế phải trong (2.44):

$$\begin{aligned} &-2\int_0^t F_m(1,s)\nabla\dot{v}_m^{(k)}(1,s)ds \\ &\qquad = -2F_m(1,s)\nabla v_m^{(k)}(1,s)\Big|_0^t + 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(F_m(1,s))\nabla v_m^{(k)}(1,s)ds \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} &= -2F_m(1,t)\nabla v_m^{(k)}(1,t) + 2F_m(1,0)\nabla v_m^{(k)}(1,0) \\ &\qquad + 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(F_m(1,s))\nabla v_m^{(k)}(1,s)ds \\ &\qquad = -2[F_m(1,t) - F_m(1,0)]\nabla v_m^{(k)}(1,t) - 2F_m(1,0)\nabla v_m^{(k)}(1,t) \\ &\qquad + 2F_m(1,0)\nabla v_m^{(k)}(1,0) + 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(F_m(1,s))\nabla v_m^{(k)}(1,s)ds \\ &\qquad = -2\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(F_m(1,s))ds.\nabla v_m^{(k)}(1,t) - 2F_m(1,0)\nabla v_m^{(k)}(1,t) \\ &\qquad + 2F_m(1,0)\nabla\widetilde{v}_{0k}(1) + 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(F_m(1,s))\nabla v_m^{(k)}(1,s)ds. \end{aligned}$$

Viết lại (2.44):

$$\begin{aligned} Y_m^{(k)}(t) &= Y_m^{(k)}(0) + 2\int_0^t a(F_m(s), \dot{v}_m^{(k)}(s))ds \\ &\quad - 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(F_m(1,s))ds.\nabla v_m^{(k)}(1,t) - 2F_m(1,0)\nabla v_m^{(k)}(1,t) \\ &\quad + 2F_m(1,0)\nabla\widetilde{v}_{0k}(1) + 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(F_m(1,s))\nabla v_m^{(k)}(1,s)ds. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Cộng hai đẳng thức (2.36), (2.46) cùng với $\int_0^t \left\|\ddot{v}_m^{(k)}(s)\right\|^2 ds$, ta thu được (2.35) và do đó bổ đề 2.4 được chứng minh.

Ta viết (2.35) dưới dạng

$$S_m^{(k)}(t) = S_m^{(k)}(0) + 2F_m(1,0)\nabla\widetilde{v}_{0k}(1) \\ + I_1 + ... + I_5 - 2F_m(1,0)\nabla v_m^{(k)}(1,t), \tag{2.47}$$

trong đó các ký hiệu $I_1,...,I_5$ là 5 tích phân theo thứ tự xuất hiện trong công thức (2.35).

Sau đây, ta sẽ lần lượt đánh giá các tích phân trong vế phải của (2.47).

Tích phân thứ nhất.

Từ (2.15), (2.18), (2.23), (2.32) và (2.33), chúng ta suy ra rằng

$$|I_1| = 2\left|\int_0^t \langle F_m(s), \dot{v}_m^{(k)}(s)\rangle ds\right| \le 2\int_0^t \|F_m(s)\| \left\| \dot{v}_m^{(k)}(s)\right\| ds \\ \le 2K_0 \int_0^t \sqrt{S_m^{(k)}(s)}ds. \tag{2.46}$$

Tích phân hai.

Ta suy từ (2.15), (2.18), (2.19), (2.23) và (2.33) rằng

$$\| F_m(s)\|_V^2 = \|\nabla F_m(s)\|^2 + h_0 F_m^2(0,s) \le 4K_1^2(1+3M^2) + h_0\, K_0^2. \tag{3.49}$$

Khi đó, từ (2.32), (2.34) và (2.49), ta thu được

$$|I_2| = 2\left|\int_0^t a(F_m(s), \dot{v}_m^{(k)}(s))ds\right| \le 2\int_0^t \|F_m(s)\|_V \left\|\dot{v}_m^{(k)}(s)\right\|_V ds$$

$$\le 2[2K_1\sqrt{1+3M^2} + \sqrt{h_0}K_0]\int_0^t \sqrt{S_m^{(k)}(s)}ds. \tag{2.50}$$

Tích phân thứ ba.

Phương trình (2.28) được viết lại như sau

$$\langle \ddot{v}_m^{(k)}(t), w_j\rangle - \langle \Delta v_m^{(k)}(t), w_j\rangle = \langle F_m(t), w_j\rangle, 1 \le j \le k. \tag{2.51}$$

Do đó, sau khi thay thế w_j bởi $\ddot{v}_m^{(k)}(t)$ và tích phân, ta suy ra rằng

$$\int_0^t \left\| \ddot{v}_m^{(k)}(s) \right\|^2 ds \le \int_0^t \left\| \Delta v_m^{(k)}(s) \right\|^2 ds + 2\int_0^t \left\| F_m(s) \right\|^2 ds$$
$$\le 2\int_0^t S_m^{(k)}(s)ds + 2\int_0^t \left\| F_m(s) \right\|^2 ds. \tag{2.52}$$

Từ (2.15), (2.18), (2.23), (2.28), (2.32), (2.34) và (2.52) ta suy ra

$$I_3 = \int_0^t \left\| \ddot{v}_m^{(k)}(s) \right\|^2 ds \le 2\int_0^t S_m^{(k)}(s)ds + 2T K_0^2. \tag{2.53}$$

Tích phân thứ tư.

Từ các giả thiết $(H_2),(H_4),$ ta suy từ (2.10), (2.11), (2.15) - (2.17) rằng

$$F_m(1,t) = h_0^2 g_1(t) - g_1^{//}(t), \quad \frac{\partial}{\partial t}(F_m(1,t)) = h_0^2\, g_1^{/}(t) - g_1^{///}(t). \tag{2.54}$$

Do đó, ta suy từ (2.54) rằng

$$\left| \frac{\partial}{\partial t}(F_m(1,t)) \right| = h_0^2 \left| g_1^{/}(t) \right| + \left| g_1^{///}(t) \right|$$
$$\le h_0^2 \sup_{0\le t\le T} \left| g_1^{/}(t) \right| + \sup_{0\le t\le T} \left| g_1^{///}(t) \right| \equiv D_1(M,T). \tag{2.55}$$

Ta chú ý rằng

$$\left| \nabla v_m^{(k)}(1,t) \right| = \left| \nabla v_m^{(k)}(0,t) + \int_0^1 \Delta v_m^{(k)}(x,t)dx \right| = \left| h_0 v_m^{(k)}(0,t) + \int_0^1 \Delta v_m^{(k)}(x,t)dx \right|$$
$$\le h_0 \left\| v_m^{(k)}(t) \right\|_V + \left\| \Delta v_m^{(k)}(t) \right\| \tag{2.56}$$
$$\le (h_0+1)\left(\left\| v_m^{(k)}(t) \right\|_V + \left\| \Delta v_m^{(k)}(t) \right\| \right) \le (h_0+1)\sqrt{S_m^{(k)}(t)}.$$

Ta suy ra từ (2.55) và (2.56) rằng

$$\left| I_4 \right| = 2\left| \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(F_m(1,s) \right) \nabla v_m^{(k)}(1,s)ds \right| \le 2(h_0+1)D_1(M,T)\int_0^t \sqrt{S_m^{(k)}(s)}\,ds \tag{2.57}$$

Tích phân thứ năm.

Dùng bất đẳng thức

$$2ab \le \frac{1}{3}a^2 + 3b^2 \quad \forall a, b \in IR, \tag{2.58}$$

ta thu được từ (2.55) và (2.56) rằng

$$\begin{aligned} |I_5| &= \left| -2\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(F_m(1,s))ds.\nabla v_m^{(k)}(1,t) \right| \\ &\le 2(h_0+1)D_1(M,T)\sqrt{S_m^{(k)}(t)} \\ &\le 3(h_0+1)^2 D_1^2(M,T) + \frac{1}{3}S_m^{(k)}(t). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Mặt khác, một lần nữa dùng bất đẳng thức (2.58), do (2.56) số hạng cuối cùng trong vế phải của (2.47) được đánh giá như sau

$$\begin{aligned} 2\left|F_m(1,0)\nabla v_m^{(k)}(1,t)\right| &\le 2(h_0+1)[h_0^2|g_1(0)| + \left|g_1^{//}(0)\right|]\sqrt{S_m^{(k)}(t)} \\ &\equiv \widetilde{D}_0\sqrt{S_m^{(k)}(t)} \le \frac{3}{4}\widetilde{D}_0^2 + \frac{1}{3}S_m^{(k)}(t). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Tổ hợp (2.47), (2.48), (2.50), (2.53), (2.57), (2.59) và (2.60), khi đó ta suy ra

$$\begin{aligned} S_m^{(k)}(t) &\le 3S_m^{(k)}(0) + 6F_m(1,0)\nabla\widetilde{v}_{0k}(1) + \frac{9}{4}\widetilde{D}_0^2 \\ &+ C_1(M,T) + 9\int_0^t S_m^{(k)}(s)ds, \end{aligned} \tag{3.61}$$

trong đó

$$\widetilde{D}_0 = 2(h_0+1)[h_0^2|g_1(0)| + \left|g_1^{//}(0)\right|],$$

$$\begin{aligned} C_1(M,T) &= 6TK_0^2 + 9(h_0+1)^2T^2D_1^2(M,T) \\ &+ 3T\left[(1+\sqrt{h_0})K_0 + 2K_1\sqrt{1+3M^2} + (1+h_0)D_1(M,T)\right]^2. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Bây giờ ta cần đánh giá số hạng $3S_m^{(k)}(0) + 6F_m(1,0)\nabla\widetilde{v}_{ok}(1)$.

Ta có

$$3S_m^{(k)}(0) + 6F_m(1,0)\nabla\widetilde{v}_{ok}(1) = 3\|\widetilde{v}_{1k}\|^2 + 3a(\widetilde{v}_{1k}, \widetilde{v}_{1k})$$

$$+3[a(\widetilde{v}_{0k},\widetilde{v}_{0k})+\|\Delta\widetilde{v}_{0k}\|^2]+6[h_0^2 g_1(0)-g_1^{//}(0)]\nabla\widetilde{v}_{0k}(1). \qquad (2.63)$$

Nhờ vào (2.10), (2.30), (2.31) và (2.63), ta cũng suy rằng tồn tại một hằng số $M>0$ độc lập với k và $m,$ sao cho

$$3S_m^{(k)}(0)+6F_m(1,0)\nabla\widetilde{v}_{0k}(1)+\frac{9}{4}\widetilde{D}_0^2\le\frac{M^2}{2},\ \text{với mọi } k \text{ và } m. \qquad (2.64)$$

Chú ý rằng, từ giả thiết (H_4), ta suy ra

$$\lim_{T\to+\infty}\sqrt{T}K_i(M,T,\widetilde{f})=0,\quad i=0,1. \qquad (2.65)$$

Khi đó, từ (2.62) và (2.65), ta luôn luôn chọn được hằng số $T>0$ sao cho

$$\left(\frac{M^2}{2}+C_1(M,T)\right)\exp(9T)\le M^2, \qquad (2.66)$$

và $$8TK_1<1. \qquad (2.67)$$

Cuối cùng, ta suy từ (2.61), (2.64) và (2.66) rằng

$$S_m^{(k)}(t)\le M^2\exp(-9T)+9\int_0^t S_m^{(k)}(s)ds,\quad 0\le t\le T_m^{(k)}\le T. \qquad (2.68)$$

Do bổ đề Gronwall ta suy từ (2.68) rằng

$$S_m^{(k)}(t)\le M^2\exp(-9T)\exp(9t)\le M^2,\quad 0\le t\le T_m^{(k)}\le T. \qquad (2.69)$$

i.e., $T_m^{(k)}=T.$ Vậy ta có

$$v_m^{(k)}\in W_1(M,T),\ \text{với mọi } m \text{ và } k. \qquad (2.70)$$

Từ (2.70) ta có thể lấy từ $\{v_m^{(k)}\}$ một dãy con $\{v_m^{(k_i)}\}$ sao cho

$$v_m^{(k_i)}\to v_m \text{ trong } L^\infty(0,T;V\cap H^2) \text{ yếu*}, \qquad (2.71)$$

$$\dot{v}_m^{(k_i)}\to \dot{v}_m \text{ trong } L^\infty(0,T;V) \text{ yếu*}, \qquad (2.72)$$

$$\ddot{v}_m^{(k_i)}\to \ddot{v}_m \text{ trong } L^2(Q_T) \text{ yếu}, \qquad (2.73)$$

$$v_m\in W_1(M,T). \qquad (2.74)$$

Qua giới hạn trong (2.28), (2.29) nhờ vào (2.71)-(2.74) ta có v_m thỏa (2.24)-(2.26) trong $L^2(0,T)$ yếu và do đó định lý 2.1 được chứng minh.

2.3. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm.

Định lý 2.2

Giả thiết $(H_1)-(H_4)$ *là đúng. Khi đó tồn tại các hằng số* $M>0, T>0$ *thỏa* (2.52), (2.54) *và* (2.55) *sao cho bài toán* (2.12)-(2.14) *có duy nhất một nghiệm yếu* $v\in W_1(M,T)$.

Mặt khác, dãy qui nạp tuyến tính $\{v_m\}$ *được xác định bởi (2.24)-(2.26) hội tụ mạnh về nghiệm* v *trong không gian*

$$W_1(T)=\{v\in L^\infty(0,T;V): \dot{v}\in L^\infty(0,T;L^2)\}.$$

Hơn nữa, ta cũng có đánh giá sai số

$$\|v_m-v\|_{L^\infty(0,T;V)}+\|\dot{v}_m-\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\le Ck_T^m,\ \text{với mọi } m, \tag{2.75}$$

trong đó

$$k_T=8TK_1<1, \tag{2.76}$$

và C *là một hằng số chỉ phụ thuộc vào* T, v_0, v_1 *và* k_T.

Chứng minh

<u>Sự tồn tại nghiệm</u>

Đầu tiên, ta chú ý rằng $W_1(T)$ là một không gian Banach đối với chuẩn

$$\|v\|_{W_1(T)}=\|v\|_{L^\infty(0,T;V)}+\|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}. \quad \text{(Xem [6])} \tag{2.77}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\{v_m\}$ là một dãy Cauchy trong $W_1(T)$.

Đặt $w_m=v_{m+1}-v_m$. Khi đó w_m thỏa bài toán biến phân

$$\langle\ddot{w}_m(t),w\rangle+a(w_m(t),w)=\langle F_{m+1}(t)-F_m(t),w\rangle,\ \text{với mọi } w\in V, \tag{2.78}$$

$$w_m(0)=\dot{w}_m(0)=0.$$

Ta lấy $w=\dot{w}_m$ trong (2.78), sau đó tích phân theo biến t

$$\|\dot{w}_m(t)\|^2 + a(w_m(t), w_m(t)) = 2\int_0^t \langle F_{m+1}(s) - F_m(s), \dot{w}_m(s)\rangle ds, \tag{2.79}$$

Mặt khác, từ (2.19) và (2.23) ta được

$$\|F_{m+1}(t) - F_m(t)\| \le K_1\left[2\|\nabla w_{m-1}(t)\| + \|\dot{w}_{m-1}(t)\|\right] \le 2K_1\|w_{m-1}\|_{W_1(T)}. \tag{2.80}$$

Ta suy từ (2.79)-(2.80) rằng

$$\begin{aligned}\|\dot{w}_m(t)\|^2 + a(w_m(t), w_m(t)) &\le 4K_1\|w_{m-1}\|_{W_1(T)}\int_0^1 \|\dot{w}_m(s)\|ds \\ &\le 4TK_1\|w_{m-1}\|_{W_1(T)}\|\dot{w}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)}.\end{aligned} \tag{2.81}$$

Do đó, ta suy từ (2.81) rằng

$$\|\dot{w}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le 4TK_1\|w_{m-1}\|_{W_1(T)}. \tag{2.82}$$

Kết hợp (2.81) và (2.82), ta thu được

$$\|w_m\|_{W_1(T)} \le k_T\|w_{m-1}\|_{W_1(T)} \text{ với mọi } m,$$

(2.83) trong đó $k_T = 8TK_1 < 1.$

Do đó

$$\|v_{m+p} - v_m\|_{W_1(T)} \le \|v_1 - v_0\|_{W_1(T)}\left(\frac{k_T^m}{1-k_T}\right) \text{ với mọi } m, p. \tag{2.84}$$

Ta suy từ (2.84) rằng $\{v_m\}$ là một dãy Cauchy trong $W_1(T)$. Do đó tồn tại $v \in W_1(T)$ sao cho

$$v_m \to v \text{ mạnh trong } W_1(T). \tag{2.85}$$

Ta chú ý rằng $v_m \in W_1(M,T)$, khi đó ta có thể lấy ra từ dãy $\{v_m\}$ một dãy con $\{v_{m_j}\}$ sao cho

$$v_{m_j} \to v \text{ trong } L^\infty(0,T;V \cap H^2) \text{ yếu*}, \tag{2.86}$$

$$\dot{v}_{m_j} \to \dot{v} \text{ trong } L^\infty(0,T;V) \text{ yếu*}, \tag{2.87}$$

$$\ddot{v}_{m_j} \to \ddot{v} \text{ trong } L^2(Q_T) \text{ yếu,} \tag{2.88}$$

$$v \in W(M,T). \tag{2.89}$$

Ta chú ý rằng

$$\left\| F_m - \widetilde{f}(x,t,v,v_x,\dot{v}) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq 2K_1 \|v_{m-1} - v\|_{W_1(T)}. \tag{2.90}$$

Do đó, từ (2.85) và (2.90) ta thu được

$$F_m \to \widetilde{f}(x,t,v,v_x,\dot{v}) \text{ mạnh trong } L^\infty(0,T;L^2). \tag{2.91}$$

Khi đó, qua giới hạn trong (2.24) - (2.26) khi $m = m_j \to +\infty$ ta thu được từ (2.69)-(2.89) và (2.91) rằng tồn tại $v \in W(M,T)$ thỏa phương trình

$$\langle \ddot{v}(t), w \rangle + a(v(t), w) = \langle \widetilde{f}(x,t,v,v_x,\dot{v}), w \rangle \text{ với mọi } w \in V, \tag{2.92}$$

và các điều kiện đầu

$$v(0) = \widetilde{v}_0, \; \dot{v}(0) = \widetilde{v}_1. \tag{2.93}$$

Mặt khác, ta có từ (2.91) và (2.92) rằng

$$\ddot{v} = v_{xx} + \widetilde{f}(x,t,v,v_x,\dot{v}) \in L^\infty(0,T;L^2). \tag{2.94}$$

Vậy, ta thu được $v \in W_1(M,T)$.

Sự tồn tại nghiệm được chứng minh hoàn tất.

Sự duy nhất nghiệm.

Giả sử v_1, v_2 là hai nghiệm yếu của bài toán (2.12)-(2.14) sao cho

$$v_i \in W_1(M,T), \quad i = 1,2. \tag{2.95}$$

Khi đó, $v(t) = v_1(t) - v_2(t)$ thỏa phương trình biến phân

$$\langle \ddot{v}(t), w \rangle + a(v(t), w) = \langle \widetilde{F}_1(t) - \widetilde{F}_2(t), w \rangle, \text{ với mọi } w \in V, \tag{2.96}$$

và các điều kiện đầu

$$v(0) = \dot{v}(0) = 0, \tag{2.97}$$

trong đó

$$\widetilde{F}_i(t) = \widetilde{f}(t, x, v_i, \nabla v_i, \dot{v}_i), \; i = 1,2. \tag{2.98}$$

Lấy $w = \dot{v}$ trong (2.96), sau đó tích phân từng phần ta thu được

$$\|\dot{w}(t)\|^2 + a(w(t), w(t)) \le 2\int_0^t \langle \widetilde{F}_1(s) - \widetilde{F}_2(s), \dot{w}(s)\rangle ds. \tag{2.99}$$

Đặt

$$Z(t) = \|\dot{w}(t)\|^2 + a(w(t), w(t)). \tag{2.100}$$

Khi đó ta thu được từ (2.99), (2.100) rằng

$$Z(t) \le 4K_1 \int_0^t Z(s) ds, \text{ với mọi } t \in [0, T].$$

Dùng bổ đề Gronwall ta suy ra $Z(t) = 0$, *i.e.*, $v_1 = v_2$.

Vậy định lý 2.2 được chứng minh hoàn tất.

CHƯƠNG 3
KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM

Trong chương này, ta luôn giả sử các giả thiết $(H_1)-(H_4)$ là đúng. Ngoài ra ta thành lập các giả thiết bổ sung như sau:

(H_5) f_1 thỏa giả thiết (H_4).

Ta xét bài toán nhiễu sau đây, trong đó ε là một tham số bé, $|\varepsilon| \le 1$:

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} u_{tt}-\Delta u = F_\varepsilon(x,t,u,u_x,u_t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \\ u_x(0,t)-h_0u(0,t)=g_0(t),\ \ u(1,t)=g_1(t), \\ u(x,0)=\tilde{u}(x),\ \ u_t(x,0)=\tilde{u}_1(x), \\ F_\varepsilon(x,t,u,u_x,u_t)=f(x,t,u,u_x,u_t)+\varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t). \end{cases}$$

Trước hết, ta giả sử rằng nếu các hàm $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, g_0, g_1, f, f_1$ thỏa các giả thiết $(H_1)-(H_5)$, khi đó, bài toán (P_ε) tương đương với bài toán giá trị biến và ban đầu sau đây:

$$(\tilde{P}_\varepsilon)\begin{cases} v_{tt}-v_{xx} = \tilde{F}_\varepsilon(x,t,v,v_x,v_t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \\ v_x(0,t)-h_0v(0,t)=v(1,t)=0, \\ v(x,0)=\tilde{v}_0(x),\ \ v_t(x,0)=\tilde{v}_1(x), \end{cases}$$

trong đó

$$\tilde{F}_\varepsilon(x,t,v,v_x,v_t)=F_\varepsilon(x,t,v+\varphi,v_x+\varphi_x,v_t+\varphi_t)+\varphi_{xx}-\varphi_{tt},$$

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{1+h_0}(x-1)g_0(t)+e^{h_0(x-1)}g_1(t),$$

$$\tilde{v}_0(x)=\tilde{u}_0(x)-\varphi(x,0),\ \tilde{v}_1(x)=\tilde{u}_1(x)-\varphi_t(x,0).$$

Ta chú ý rằng, các đánh giá tiên nghiệm của dãy xấp xỉ Galerkin $\{v_m^{(k)}\}$ trong chứng minh Định lý 2.1 cho bài toán (P_ε) thỏa

$$v_m^{(k)} \in W_1(M,T), \tag{3.1}$$

trong đó M, T là các hằng số độc lập với m, k và ε. Thật vậy, trong quá trình chứng minh ta chọn các hằng số dương M và T như trong (2.64), (2.66), (2.67), trong đó $K_i(M, T, \tilde{f}), i = 0,1,$ được thay thế bởi $\sup_{|\varepsilon| \le 1} K_i(M, T, \tilde{F}_\varepsilon),\ i = 0,1,$ lần lượt.

Do đó, giới hạn v_ε trong các không gian hàm thích hợp của dãy $\{v_m^{(k)}\}$ khi $k \to +\infty$, sau đó $m \to +\infty$, là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{P}_\varepsilon)$ thỏa

$$v_\varepsilon \in W_1(M, T). \tag{3.2}$$

Khi đó ta có thể chứng minh một cách tương tự như trong chứng minh của định lý 2.2, rằng giới hạn v_0 trong các không gian hàm thích hợp của họ $\{v_\varepsilon\}$ khi $\varepsilon \to 0$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{P}_0)$ tương ứng với $\varepsilon = 0$ thỏa

$$v_0 \in W_1(M, T). \tag{3.3}$$

Do đó, $u_\varepsilon = v_\varepsilon + \varphi$ (tương ứng với $u_0 = v_0 + \varphi$) là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (P_ε) (tương ứng với $\varepsilon = 0$).

Hơn nữa, ta có định lý sau.

Định lý 3.1

Giả sử $(H_1) - (H_5)$ là đúng. Khi đó tồn tại các hằng số $M > 0$ và $T > 0$ sao cho, với mọi ε với $|\varepsilon| \le 1$, bài toán (P_ε) có duy nhất một nghiệm yếu $u_\varepsilon \in W_1(M, T)$ thỏa một đánh giá tiệm cận

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\dot{u}_\varepsilon - \dot{u}_0\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le C|\varepsilon|, \tag{3.4}$$

trong đó C là một hằng số chỉ phụ thuộc vào $h_0, T, M, K_1(M, T, f)$ và $K_0(M, T, f_1)$.

Chứng minh. Đặt $v = v_\varepsilon - v_0 = u_\varepsilon - u_0$. Khi đó, v thỏa bài toán biến phân

$$\langle \ddot{v}(t), w\rangle + a(v(t), w) = \langle \hat{f}_\varepsilon(t), w\rangle + \varepsilon\langle f_{1\varepsilon}(t), w\rangle, \text{ với mọi } w \in V, \tag{3.5}$$

$$v(0) = \dot{v}(0) = 0,$$

trong đó

$$\begin{cases} \hat{f}_\varepsilon = \hat{f}_\varepsilon(x,t) = f(x,t,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon) - f(x,t,u_0,\nabla u_0,\dot{u}_0), \\ f_{1\varepsilon} = f_1(x,t,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon). \end{cases} \tag{3.6}$$

Lấy $w = \dot{v}$ trong (3.5), khi đó ta thu được sau khi tích phân từng phần theo t

$$\|\dot{v}(t)\|^2 + a(v(t),v(t)) = 2\int_0^t \langle \hat{f}_\varepsilon(s), \dot{v}(s)\rangle ds + 2\varepsilon\int_0^t \langle f_{1\varepsilon}(s), \dot{v}(s)\rangle ds. \tag{3.7}$$

Đặt

$$\sigma(t) = \|\dot{v}(t)\|^2 + a(v(t),v(t)), \tag{3.8}$$

khi đó, ta có thể chứng minh một cách tương tự bất đẳng thức sau đây

$$\|\dot{v}(t)\|^2 + a(v(t),v(t)) \leq \gamma_1 T\varepsilon^2 + \gamma_2\int_0^t \sigma(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.9}$$

trong đó

$$\gamma_1 = K_0(M,T,f_1), \gamma_2 = K_0(M,T,f_1) + 6K_1(M,T,f). \tag{3.10}$$

Tiếp theo, do (3.9) và bổ đề Gronwall, ta thu được

$$\sigma(t) \leq \gamma_1 T\varepsilon^2 \exp(\gamma_2 T), \quad \text{với mọi} \quad t \in [0,T]. \tag{3.11}$$

Do đó

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C|\varepsilon|, \tag{3.12}$$

trong đó $C = 2\sqrt{\gamma_1 T\exp(\gamma_2 T)}$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào h_0, T, M, $K_1(M,T,f)$ *và* $K_0(M,T,f_1)$. Chứng minh định lý 3.1 được hoàn tất.

Trong phần tiếp theo chúng tôi nghiên cứu một khai triển tiệm cận của u_ε đến cấp 3 theo ε, với ε đủ nhỏ. Bây giờ, ta giả sử rằng

(H_6) $\quad f \in C^3([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$, $f_1 \in C^2([0,1] \times IR_+ \times IR^3)$, thỏa các điều kiện sau

(i) $f(1,t,u,v,w) = f_1(1,t,u,v,w) = 0,$

(ii) $f_u^{/}(1,t,u,v,w) = f_{1u}^{/}(1,t,u,v,w) = 0,$

(iii) $f_{u_x}^{/}(1,t,u,v,w) = f_{1u_x}^{/}(1,t,u,v,w) = 0,$

(iv) $f_{u_t}^{/}(1,t,u,v,w) = f_{1u_t}^{/}(1,t,u,v,w) = 0,$

(v) $f_{pq}^{//}(1,t,u,v,w) = 0,$ với $p,q \in \{u,v,w\},$

với mọi $t \geq 0$ và $(u,v,w) \in IR^3$.

Để cho gọn biểu thức, ta dùng ký hiệu sau $f[u] = f(x,t,u,u_x,u_t)$.

Giả sử $u_0 \in W_1(M,T)$ là một nghiệm yếu của bài toán (P_0) tương ứng với $\varepsilon = 0$.

Giả sử là hai nghiệm yếu $u_1, u_2 \in W_1(M,T)$ (với các hằng số $M > 0, T > 0$ thích hợp) được xác định bởi hai bài toán sau:

$$(\widetilde{Q}_i)\begin{cases} \ddot{u}_i - \Delta u_i = \widetilde{F}_i[u_i],\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_{ix}(0,t) - h_0 u_i(0,t) = u_i(1,t) = 0, \\ u_i(x,0) = \dot{u}_i(x,0) = 0, \quad i = 1,2, \end{cases}$$

trong đó

$$\widetilde{F}_1[u_1] = f_1[u_0] + f_u^{/}[u_0]u_1 + f_{u_x}^{/}[u_0]\nabla u_1 + f_{\dot{u}}^{/}[u_0]\dot{u}_1, \tag{3.13}$$

và

$$\widetilde{F}_2[u_2] = c_1(f_1) + c_2(f), \tag{3.14}$$

với

$$c_1(f) = f_u^{/}[u_0]u_1 + f_{u_x}^{/}[u_0]\nabla u_1 + f_{\dot{u}}^{/}[u_0]\dot{u}_1, \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} c_2(f) = {} & f_u^{/}[u_0]u_2 + f_{u_x}^{/}[u_0]\nabla u_2 + f_{\dot{u}}^{/}[u_0]\dot{u}_2 \\ & + \frac{1}{2}c_1(f_u^{/})u_1 + \frac{1}{2}c_1(f_{u_x}^{/})\nabla u_1 + \frac{1}{2}c_1(f_{\dot{u}}^{/})\dot{u}_1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Giả sử $u_\varepsilon \in W_1(M,T)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán P_ε. Khi đó, $v = u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1 - \varepsilon^2 u_2 \equiv u_\varepsilon - h$ thỏa bài toán

$$\begin{cases} \ddot{v} - \Delta v = F_\varepsilon[v+h] - F_\varepsilon[h] + E_\varepsilon(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ v_x(0,t) - h_0 v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = \dot{v}(x,0) = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

trong đó

$$E_\varepsilon(x,t) = F_\varepsilon[h] - f[u_0] - \varepsilon \widetilde{F}_1[u_1] - \varepsilon^2 \widetilde{F}_2[u_2]. \tag{3.18}$$

Khi đó, ta có bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.1

Giả sử $(H_1),(H_2),(H_3)$ và (H_6) là đúng. Khi đó ta có

$$\|E_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \widetilde{K}|\varepsilon|^3, \tag{3.19}$$

trong đó $\widetilde{K}$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào M,T và các hằng số

$$K_i(M,T,f),\ i=1,2,3; \quad K_i(M,T,f_1),\ i=1,2,$$

với

$$K_2(M,T,f) = \sup_{\substack{0\le x\le 1,\, 0\le t\le T,\\ |u|,|u_x|,|\dot{u}|\le M}} \sum_{p,q\in\{u,u_x,\dot{u}\}} \left| f_{pq}^{//}[u] \right|$$

và

$$K_3(M,T,f) = \sup_{\substack{0\le x\le 1,\, 0\le t\le T,\\ |u|,|u_x|,|\dot{u}|\le M}} \sum_{p,q,r\in\{u,u_x,\dot{u}\}} \left| f_{pqr}^{///}[u] \right|.$$

Chứng minh.

Trước hết, ta có thể nghiệm lại rằng các công thức sau đây là đúng

$$c_i(f) = \frac{\varepsilon^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i}(f[h])\bigg|_{\varepsilon=0},\quad i=1,2. \tag{3.20}$$

Ta lần lượt khai triển MacLaurin các hàm $f[h]$ và $f_1[h]$ xung quanh điểm $\varepsilon = 0$ đến cấp 3 và 2, ta thu được

$$\begin{aligned} f[h] - f[u_0] &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(f[h])\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}(f[h])\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial \varepsilon^3}(f[h])\Big|_{\varepsilon=\theta_1\varepsilon} \\ &= c_1(f)\varepsilon + c_2(f)\varepsilon^2 + \varepsilon^3 R_3[f, u_0, u_1, u_2, \varepsilon, \theta_1], \end{aligned} \tag{3.21}$$

và

$$\begin{aligned} f_1[h] &= f_1[u_0] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(f_1[h])\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}(f[h])\Big|_{\varepsilon=\theta_2\varepsilon} \\ &= f_1[u_0] + c_1(f_1)\varepsilon + \varepsilon^2 R_2[f_1, u_0, u_1, u_2, \varepsilon, \theta_2], \end{aligned} \tag{3.22}$$

trong đó $R_3[f, u_0, u_1, u_2, \varepsilon, \theta_1]$ và $R_2[f, u_0, u_1, u_2, \varepsilon, \theta_2]$ được xác định như sau

$$R_3[f, u_0, u_1, u_2, \varepsilon, \theta_1] = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial \varepsilon^3}(f[h])\Big|_{\varepsilon=\varepsilon\theta_1}, \tag{3.23}$$

và

$$R_2[f, u_0, u_1, u_2, \varepsilon, \theta_2] = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}(f[h])\Big|_{\varepsilon=\varepsilon\theta_2}, \tag{3.24}$$

với $0 < \theta_i < 1,\ i = 1,2.$

Tổ hợp (3.21)-(3.24), khi đó ta thu được

$$\begin{aligned} F_\varepsilon[h] - f[u_0] &= f[h] - f[u_0] + \varepsilon f_1[h] \\ &= (f_1[u_0] + c_1(f))\varepsilon + (c_1(f_1) + c_2(f))\varepsilon^2 \\ &\quad + \varepsilon^3 R[f, f_1, u_0, u_1, u_2, \varepsilon, \theta_1, \theta_2], \end{aligned} \tag{3.25}$$

với
$$\begin{aligned} R[f, f_1, u_0, u_1, u_2, \varepsilon, \theta_1, \theta_2] &= R_3[f, f_1, u_0, u_1, u_2, \varepsilon, \theta_1] \\ &\quad + R_2[f, f_1, u_0, u_1, u_2, \varepsilon,, \theta_2]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Tổ hợp (3.13)-(3.16), (3.25) và (3.26), khi đó ta thu được

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(x,t) &= F_\varepsilon[h] - f[u_0] - \varepsilon \widetilde{F}_1[u_1] - \varepsilon^2 \widetilde{F}_2[u_2] \\ &= \varepsilon^3 R[f, f_1, u_0, u_1, u_2, \varepsilon, \theta_1, \theta_2]. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Do tính bị chặn của các hàm $u_i, \nabla u_i, \dot{u}_i,\ i = 0,1,2$ trong không gian hàm $L^\infty(0,T;H^1)$ ta thu được từ (3.23), (3.24), (3.26) và (3.27) rằng

$$\|E_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \widetilde{K}|\varepsilon|^3, \tag{3.28}$$

trong đó $\widetilde{K}$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào M, T và các hằng số

$$K_i(M,T,f),\ i=1,2,3; \quad K_i(M,T,f_1),\ i=1,2,$$

và chứng minh bổ đề 3.1 hoàn tất.

Bây giờ, ta xét dãy hàm $\{v_m\}$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} & v_0 \equiv 0, \\ & \ddot{v}_m - \Delta v_m = F_\varepsilon[v_{m-1} + h] - F_\varepsilon[h] + E_\varepsilon(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ & v_{mx}(0,t) - h_0 v_m(0,t) = v_m(1,t) = 0, \\ & v_m(x,0) = \dot{v}_m(x,0) = 0, \quad m \ge 1. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Với $m = 1$, ta có bài toán

$$\begin{cases} \ddot{v}_1 - \Delta v_1 = E_\varepsilon(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ v_{1x}(0,t) - h_0 v_1(0,t) = v_1(1,t) = 0, \\ v_1(x,0) = \dot{v}_1(x,0) = 0. \end{cases} \tag{3.30}$$

Bằng cách nhân hai vế của (3.30) bởi $\dot{v}_1$ ta không khó khăn từ (3.19) rằng

$$\|\dot{v}_1(t)\|^2 + a(v_1(t), v_1(t)) \le 2\widetilde{K}|\varepsilon|^3 \int_0^t \|\dot{v}_1(s)\| ds. \tag{3.31}$$

Do đó, cũng từ (3.31) ta suy ra

$$\|\dot{v}_1\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v_1\|_{L^\infty(0,T;V)} \le 4T\widetilde{K}|\varepsilon|^3. \tag{3.32}$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một hằng số C_T, độc lập với m và ε, sao cho

$$\|\dot{v}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v_m\|_{L^\infty(0,T;V)} \le C_T|\varepsilon|^3,\ |\varepsilon| \le 1 \text{ với tất cả } m. \tag{3.33}$$

Bằng cách nhân hai vế của (3.29) bởi $\dot{v}_m$ và sau khi tích phân theo t, ta thu được

$$
\begin{aligned}
&\|\dot v_m(t)\|^2 + a(v_m(t), v_m(t)) \\
&\qquad \le 2\int_0^t (\|f[v_{m-1}+h] - f[h]\| + \|f_1[v_{m-1}+h] - f_1[h]\|)\|\dot v_m\| ds \qquad (3.34)\\
&\qquad + 2\widetilde{K}|\varepsilon|^3 \int_0^t \|\dot v_m(s)\| ds,
\end{aligned}
$$

Đặt

$$\Psi_m = \|\dot v_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v_m\|_{L^\infty(0,T;V)}. \qquad (3.35)$$

Ta suy từ (3.34) và (3.35) rằng

$$\Psi_m \le \sigma \Psi_{m-1} + \delta, \text{ với mọi } m \ge 1, \qquad (3.36)$$

với

$$\sigma = 8T[K_1(M,T,f) + K_1(M,T,f_1)], \ \delta = 4T\widetilde{K}|\varepsilon|^3. \qquad (3.37)$$

Ta giả sử rằng

$$\sigma < 1, \text{ với hằng số thích hợp } T > 0. \qquad (3.38)$$

Bây giờ, ta sẽ cần bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.2

Giả sử dãy $\{\Psi_m\}$ *thỏa*

$$0 \le \Psi_m \le \sigma\Psi_{m-1} + \delta, \text{ với mọi } m \ge 1, \qquad \Psi_0 = 0, \qquad (3.39)$$

trong đó $0 \le \sigma < 1,\ \delta \ge 0$ *là các hằng số cho trước. Khi đó,*

$$\Psi_m \le \frac{\delta}{1-\sigma} \textit{ với mọi } m \ge 1. \qquad (3.40)$$

Ta suy từ (3.36), (3.37) và (3.40) rằng

$$\|\dot v_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v_m\|_{L^\infty(0,T;V)} \le \frac{\delta}{1-\sigma} = C_T|\varepsilon|^3, \qquad (3.41)$$

trong đó

$$C_T = \frac{4T\widetilde{K}}{1 - 8T[K_1(M,T,f) + K_1(M,T,f_1)]}. \qquad (3.42)$$

Mặt khác, dãy qui nạp tuyến tính $\{v_m\}$ được xác định bởi (3.29) hội tụ mạnh trong không gian $W_1(T)$ về nghiệm v của bài toán (3.17). Do đó, cho $m \to +\infty$ trong (3.41) ta thu được

$$\|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C_T|\varepsilon|^3$$

hay

$$\left\|\dot{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i \dot{u}_i\right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\|u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i u_i\right\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C_T|\varepsilon|^3. \tag{3.43}$$

Vậy, ta có định lý sau.

Định lý 3.2

Giả sử $(H_1),(H_2),(H_3)$ *và* (H_6) *là đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số* $M>0$ *và* $T>0$ *sao cho, với mọi* ε, *với* $|\varepsilon|\leq 1$, *bài toán* (P_ε) *có duy nhất một nghiệm yếu* $u_\varepsilon \in W_1(M,T)$ *thỏa một đánh giá tiệm cận đến cấp 3 như trong* (3.43), *các hàm* u_0,u_1,u_2 *lần lượt là các nghiệm yếu của các bài toán* $(P_0),(\widetilde{Q}_1)$ *và* $(\widetilde{Q}_2)$.

Chú thích 3.1.

Trong [9] các tác giả đã xét khai triển tiệm cận đến cấp 2 cho bài toán (0.1), (0.3) với điều kiện biên hỗn hợp thuần nhất (0.12), tương ứng với đánh giá như sau

$$\|\dot{u}_\varepsilon - \dot{u}_0 - \varepsilon\,\dot{u}_1\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C_T\varepsilon^2. \tag{3.44}$$

CHƯƠNG 4
KHẢO SÁT MỘT TRƯỜNG HỢP CỤ THỂ

Trong chương này, chúng ta xét một ví dụ cụ thể về khai triển tiệm cận cho bài toán tương ứng với

$$f = 0,\ \ f_1 = u^2. \tag{4.1}$$

Trước tiên, ta giả sử rằng

$$f_1 \in C^N(IR),\ N \geq 1. \tag{4.2}$$

Giả sử $(H_1),(H_2),(H_3)$ và (4.2) là đúng. Lặp lại qui trình chứng minh như ở chương 2, ta cũng thu được một định lý tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán (0.1) – (0.3) tương ứng với $f = \varepsilon f_1(u) = \varepsilon u^2$, ε là một tham số, $|\varepsilon| \leq 1$.

Giả sử $u_\varepsilon \in W_1(M,T)$ (với $M > 0, T > 0$ thích hợp) là nghiệm yếu của bài toán

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} \ddot{u}_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = \varepsilon f_1(u_\varepsilon),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_{\varepsilon x}(0,t) - h_0\, u_\varepsilon(0,t) = g_0(t), \\ u_\varepsilon(1,t) = g_1(t), \\ u_\varepsilon(x,0) = \widetilde{u}_0(x), \quad \dot{u}_\varepsilon(x,0) = \widetilde{u}_1(x). \end{cases}$$

Giả sử rằng $u_1, u_2, ..., u_N \in W_1(M,T)$ (với các hằng số $M > 0, T > 0$ thích hợp) lần lượt là các nghiệm yếu của các bài toán sau:

$$(P_0)\begin{cases} \ddot{u}_0 - \Delta u_0 = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_{0x}(0,t) - h_0 u_0(0,t) = g_0(t), \\ u_0(1,t) = g_1(t), \\ u_0(x,0) = \widetilde{u}_0(x), \quad \dot{u}_0(x,0) = \widetilde{u}_1(x), \end{cases}$$

$$(\widetilde{Q}_1)\begin{cases} \ddot{u}_1 - \Delta u_1 = f_1(u_0),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_{1x}(0,t) - h_0 u_1(0,t) = u_1(1,t) = 0, \\ u_1(x,0) = \dot{u}_1(x,0) = 0, \end{cases}$$

với $2 \le p \le N$ thì

$$(\widetilde{Q}_p)\begin{cases} \ddot{u}_p - \Delta u_p = H_p,\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_{px}(0,t) - h_0 u_p(0,t) = u_p(1,t) = 0, \\ u_p(x,0) = \dot{u}_p(x,0) = 0, \end{cases}$$

trong đó, $H_p = H_p(x,t,u_0,u_1,...,u_{p-1}),\ 2 \le p \le N,$ được xác định như sau

$$H_2 = H_2(u_0,u_1) = f_1^{/}(u_0)u_1, \tag{4.3}$$

và

$$H_p(x,t,u_0,u_1,...,u_{p-1}) = f_p^{/}(u_0)u_{p-1} + \sum_{k=2}^{p-1} f_1^{(k)}(u_0) \sum_{\substack{\alpha_1+...+\alpha_{p-2}=k, \\ \alpha_1+2\alpha_2+...+(p-2)\alpha_{p-2}=p-1}} \frac{u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}...u_{p-2}^{\alpha_{p-2}}}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_{p-2}!}, \tag{4.4}$$

với $3 \le p \le N.$

Đặt

$$v = u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^p u_p \equiv u_\varepsilon - h.$$

Khi đó v là nghiệm yếu của bài toán

$$\begin{cases} \ddot{v} - \Delta v = \varepsilon[f_1(v+h) - f_1(h)] + E_\varepsilon(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ v_x(0,t) - h_0 v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = \dot{v}(x,0) = 0, \end{cases}$$

trong đó

$$E_\varepsilon(x,t) = \varepsilon(f_1(h) - f_1(u_0)) - \sum_{p=2}^{N} \varepsilon^p H_p.$$

Khi đó, ta có bổ đề sau đây.

Bổ đề 4.1

Cho $N \ge 1$. *Giả sử* $(H_1),(H_2),(H_3)$ *và* $f_1 = C^N(IR)$ *là đúng. Khi đó*

$$\|E_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \widetilde{K}_1 |\varepsilon|^{N+1}, \tag{4.8}$$

trong đó $\widetilde{K}_1$ *là một hằng số chỉ phụ thuộc vào* N, M, T *và các hằng số*

$$\overline{K}_i(T, f_1) = \sup_{0\le x\le 1,\ 0\le t\le T} \left| f_1^{(i)}(u_0(x,t)) \right|, \quad i = 0,1,\dots,N-1,$$

và

$$\overline{K}_N(M, f_1) = \sup_{|u| \le (N+1)M} \left| f_1^{(N)}(u) \right|.$$

Chứng minh.

Trường hợp $N=1$ thì dễ dàng, ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $N \ge 2$.
Đặt

$$h = u_0 + U \equiv u_0 + \sum_{p=1}^{N} \varepsilon^p u_p.$$

Ta khai triển MacLaurin hàm $f_1(h) - f_1(u_0)$ xung quanh điểm u_0 đến cấp N, ta thu được

$$\begin{aligned} f_1(h) - f_1(u_0) &= f_1(u_0 + U) - f_1(u_0) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} f_1^{(k)}(u_0) U^k + \frac{1}{N!} f_1^{(N)}(u_0 + \theta U) U^N, \ 0 < \theta < 1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Chú ý rằng

$$U^k = \left(\sum_{p=1}^{N} \varepsilon^p u_p\right)^k$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)\in Z_+^N,\alpha_1+\ldots+\alpha_N=k} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_N!}(\varepsilon u_1)^{\alpha_1}(\varepsilon^2 u_2)^{\alpha_2}\ldots(\varepsilon^N u_N)^{\alpha_N} \qquad (4.10)$$

$$= \sum_{\alpha\in Z_+^N,|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}u^\alpha \varepsilon^{\eta(\alpha)} = \sum_{p=1}^{kN}\left(\sum_{\alpha\in Z_+^N,|\alpha|=k,\eta(\alpha)=p}\frac{k!}{\alpha!}u^\alpha\right)\varepsilon^p,$$

trong đó ta ký hiệu

$$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)\in Z_+^N,$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N,$$
$$\eta(\alpha) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + N\alpha_N,$$
$$\alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_N!,$$
$$u^\alpha = u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\ldots u_N^{\alpha_N}.$$

Khi đó, ta viết lại (4.9) như sau:

$$f_1(h) - f_1(u_0) = \sum_{p=1}^{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N-1} f_1^{(k)}(u_0)\left(\sum_{\alpha\in Z_+^N,\ |\alpha|=k,\ \eta(\alpha)=p}\frac{u^\alpha}{\alpha!}\right)\varepsilon^p$$
$$+\frac{1}{N!}f_1^{(N)}(u_0+\theta U)U^N$$
$$=\sum_{p=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} f_1^{(k)}(u_0)\left(\sum_{\alpha\in Z_+^N,\ |\alpha|=k,\ \eta(\alpha)=p}\frac{u^\alpha}{\alpha!}\right)\varepsilon^p$$
$$+\sum_{p=N}^{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N-1} f_1^{(k)}(u_0)\left(\sum_{\alpha\in Z_+^N,\ |\alpha|=k,\ \eta(\alpha)=p}\frac{u^\alpha}{\alpha!}\right)\varepsilon^p$$
$$+\frac{1}{N!}f_1^{(N)}(u_0+\theta U)U^N$$

$$= \sum_{p=1}^{N-1} C[p, f_1]\varepsilon^p + \sum_{p=N}^{N(N-1)} \widetilde{C}[N, p, f_1]\varepsilon^p + R_N(\varepsilon, f_1), \tag{4.11}$$

trong đó

$$\begin{aligned} C[p, f_1] &= \sum_{k=1}^{N-1} f_1^{(k)}(u_0)\left(\sum_{\alpha\in Z_+^N,\ |\alpha|=k,\ \eta(\alpha)=p} \frac{u^\alpha}{\alpha!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} f_1^{(k)}(u_0) \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=k, \\ \alpha_1+2\alpha_2+\ldots+p\alpha_p=p}} \frac{u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\ldots u_p^{\alpha_p}}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_p!} \quad , \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\widetilde{C}[N, p, f_1] = \sum_{k=1}^{N-1} f_1^{(k)}(u_0)\left(\sum_{\alpha\in Z_+^N,\ |\alpha|=k,\ \eta(\alpha)=p} \frac{u^\alpha}{\alpha!} \right) , \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} R_N(\varepsilon, f_1) &= \frac{1}{N!} f_1^{(N)}(u_0 + \theta U)U^N \\ &= \frac{\varepsilon^N}{N!} f_1^{(N)}(u_0 + \theta U)(u_1 + \varepsilon u_2 + \ldots + \varepsilon^{N-1}u_N)^N . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Tổ hợp (4.7), (4.11) - (4.14), khi đó ta thu được

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(x,t) &= \varepsilon(f_1(h) - f_1(u_0)) - \sum_{p=2}^{N} \varepsilon^p H_p \\ &= \sum_{p=1}^{N-1} C[p, f_1]\varepsilon^{p+1} + \sum_{p=N}^{N(N-1)} \widetilde{C}[N, p, f_1]\varepsilon^{p+1} \\ &\quad + \varepsilon R_N(\varepsilon, f_1) - \sum_{p=2}^{N} \varepsilon^p H_p \\ &= \sum_{p=2}^{N} C[p-1, f_1] - H_p)\varepsilon^p + \varepsilon^{N+1} \sum_{p=N}^{N(N-1)} \widetilde{C}[N, p, f_1]\varepsilon^{p-N} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^{N+1}}{N!} f_1^{(N)}(u_0 + \theta U)(u_1 + \varepsilon u_2 + \ldots + \varepsilon^{N-1}u_N)^N . \end{aligned} \tag{4.15}$$

Chú ý rằng

$$C[p-1,f_1]=\sum_{k=1}^{p-1} f_1^{(k)}(u_0)\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{p-1}=k,\\ \alpha_1+2\alpha_2+...+(p-1)\alpha_{p-1}=p-1}} \frac{u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}...u_{p-1}^{\alpha_{p-1}}}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_{p-1}!} = H_p,$$

với mọi $2 \le p \le N$.

Vậy (4.15) viết lại

$$E_\varepsilon(x,t)=\varepsilon^{N+1}\sum_{p=N}^{N(N-1)}\widetilde{C}[N,p,f]\varepsilon^{p-N}$$

$$+\frac{\varepsilon^{N+1}}{N!}f_1^{(N)}(u_0+\theta U)\left(u_1+\varepsilon u_2+...+\varepsilon^{N-1}u_N\right)^N. \tag{4.16}$$

Do tính bị chặn của các hàm u_i, $i=0,1,...,N$ trong không gian hàm $L^\infty(0,T;V)$, ta thu được từ (4.13), (4.14) và (4.16) rằng

$$\|E_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \widetilde{K}_1|\varepsilon|^{N+1}, \tag{4.17}$$

trong đó

$$\widetilde{K}_1=(N-1)^2\sum_{k=1}^{N-1}(NM)^k\,\overline{K}_k(T,f_1)+\frac{1}{N!}(NM)^N\,\overline{K}_N(M,f_1).$$

Bổ đề 4.1 được chứng minh hoàn tất.

Bây giờ, ta xét dãy qui nạp tuyến tính $\{v_m\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} v_0 \equiv 0, \\ \ddot{v}_m-\Delta v_m=\varepsilon[f_1(v_{m-1}+h)-f_1(h)] \\ \qquad\qquad +E_\varepsilon(x,t), \quad 0<x<1,\, 0<t<T, \\ v_{mx}(0,t)-h_0v_m(0,t)=v_m(1,t)=0, \\ v_m(x,0)=\dot{v}_m(x,0)=0, \quad m\ge 1. \end{cases} \tag{4.18}$$

Với $m=1$, ta có bài toán

$$\begin{cases} \ddot{v}_1 - \Delta v_1 = E_\varepsilon(x,t),\ 0 < x < 1,\ \ 0 < t < T, \\ v_{1x}(0,t) - h_0 v_1(0,t) = v_1(1,t) = 0, \\ v_x(x,0) = \dot{v}_1(x,0) = 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Bằng cách nhân hai vế của (4.19) bởi $\dot{v}_1$, ta tìm không khó khăn từ (4.8) rằng

$$\|\dot{v}_1(t)\|^2 + a(v_1(t), v_1(t)) \le 2\widetilde{K}_1 |\varepsilon|^{N+1} \int_0^t \|\dot{v}_1(s)\| ds. \tag{4.20}$$

Do đó

$$\|\dot{v}_1\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v_1\|_{L^\infty(0,T;V)} \le 4T\widetilde{K}_1 |\varepsilon|^{N+1}. \tag{4.21}$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một hằng số C_T độc lập với m và ε, sao cho

$$\|\dot{v}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v_m\|_{L^\infty(0,T;V)} \le C_T |\varepsilon|^{N+1},\ |\varepsilon| \le 1,\ \text{với mọi } m. \tag{4.22}$$

Bằng cách nhân hai vế của (4.18) bởi $\dot{v}_m$ và sau khi tích phân theo t, ta thu được

$$\begin{aligned} &\|\dot{v}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + a(v_1(t), v_1(t)) \\ &\qquad \le 2\varepsilon \int_0^t \|f_1(v_{m-1} + h) - f_1(h)\| \|\dot{v}_m\| ds + 2\widetilde{K} |\varepsilon|^{N+1} \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\| ds \\ &\qquad \le 2\varepsilon K_1(M, f_1) \int_0^t \|v_{m-1}(s)\| \|\dot{v}_m(s)\| ds + 2\widetilde{K}_1 |\varepsilon|^{N+1} \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\| ds. \end{aligned} \tag{4.23}$$

trong đó $K_1(M, f_1) = \sup_{|u| \le M} |f_1^{/}(u)|$.

Đặt

$$\Psi_m = \|\dot{v}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v_m\|_{L^\infty(0,T;V)}, \tag{4.24}$$

ta suy từ (2.23) và (4.24) rằng

$$\Psi_m \leq \sigma \Psi_{m-1} + \delta \text{ với mọi } m \geq 1, \tag{4.25}$$

với

$$\sigma = 4TK_1(M, f_1), \ \delta = 4T\widetilde{K}_1 |\varepsilon|^{N+1}. \tag{4.26}$$

Giả sử rằng

$$\sigma = 4TK_1(M, f_1) < 1, \text{ với hằng số thích hợp } T > 0. \tag{4.27}$$

Bây giờ, ta dùng bổ đề 3.2 một lần nữa ta thu được từ (4.25) - (4.27) rằng

$$\|\dot{v}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v_m\|_{L^\infty(0,T;V)} = \Psi_m \leq \frac{\delta}{1-\sigma} = C_T |\varepsilon|^{N+1}, \text{ với mọi } m \geq 1, \tag{4.28}$$

trong đó

$$C_T = \frac{4T\widetilde{K}_1}{1 - 4TK_1(M, f_1)}.$$

Mặt khác, dãy qui nạp tuyến tính $\{v_m\}$ được xác định bởi (4.18) hội tụ mạnh trong không gian $W_1(T)$ về nghiệm v của bài toán (4.6). Do đó, cho $m \to +\infty$ trong (4.28) ta thu được

$$\|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C_T |\varepsilon|^{N+1}. \tag{4.29}$$

Vậy, ta có định lý sau.

Định lý 4.1. *Cho $N \geq 1$. Giả sử $(H_1), (H_2), (H_3)$ và $f_1 \in C^N(IR)$ là đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0$ và $T > 0$ sao cho, với mọi ε, với $|\varepsilon| \leq 1$, bài toán (P_ε) có duy nhất một nghiệm yếu $u_\varepsilon \in W_1(M, T)$ thỏa một đánh giá tiệm cận đến cấp $N+1$ như sau*

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i u_i + O(\varepsilon^{N+1}),$$

theo nghĩa

$$\left\| \dot{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \dot{u}_i \right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\| u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i u_i \right\|_{L^\infty(0,T;V)} \le C_T |\varepsilon|^{N+1}, \tag{4.30}$$

trong đó, các hàm $u_0, u_1, ..., u_N$ *lần lượt là các nghiệm yếu của các bài toán* $(P_0), (\widetilde{Q}_1), ..., (\widetilde{Q}_N)$.

Trong phần cuối cùng này, ta sẽ xét với một hàm cụ thể như (4.1): $f_1(u) = u^2$. Khi đó, $f_1 \in C^\infty(IR)$.. Mặt khác, do $f_1^{(k)} = 0$ với mọi $k \ge 3$, phần dư trong khai triển Taylor của hàm f_1 ở cấp 3 trong công thức (4.9) là bằng không

$$\begin{aligned} f_1(h) - f_1(u_0) &= \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k!} f_1^{(k)}(u_0) U^k \\ &= \sum_{p=1}^{N-1} \left(\frac{2}{p} \sum_{i=0}^{p-1} (p-i) u_i u_{p-i} \right) \varepsilon^p + \sum_{p=N}^{2N} \left(\frac{2}{p} \sum_{i=0}^{p-1} (p-i) u_i u_{p-i} \right) \varepsilon^p. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Do đó

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(x,t) &= \varepsilon(f_1(h) - f_1(u_0)) - \sum_{p=2}^{N} \varepsilon^p H_p \\ &= \sum_{p=1}^{N-1} \left(\frac{2}{p} \sum_{i=0}^{p-1} (p-i) u_i u_{p-i} - H_{p+1} \right) \varepsilon^{p+1} \\ &\quad + \sum_{p=N}^{2N} \left(\frac{2}{p} \sum_{i=0}^{p-1} (p-i) u_i u_{p-i} \right) \varepsilon^{p+1}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Các biểu thức H_p trong các bài toán $(\widetilde{Q}_p)$ được tính cụ thể như sau:

$$H_1 = H_1(u_0) = f_1(u_0) = u_0^2, \tag{4.33}$$

$$H_2 = H_2(u_0, u_1) = f_1'(u_0) u_1 = 2u_0 u_1, \tag{4.34}$$

và

$$H_p = H_p(x, t, u_0, u_1, ..., u_{p-1}) = \frac{2}{p-1} \sum_{i=0}^{p-2} (p-i-1) u_i u_{p-i-1}$$

$$= 2u_0 u_{p-1} + \frac{2}{p-1}\sum_{i=1}^{p-2}(p-i-1)u_i u_{p-i-1}, \quad (3 \le p \le N). \tag{4.35}$$

Biểu thức $E_\varepsilon(x,t)$ trong (4.32) viết lại

$$E_\varepsilon(x,t) = \varepsilon^{N+1}\sum_{p=N}^{2N}\left(\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{p-1}(p-i)u_i u_{p-i}\right)\varepsilon^{p-N}.$$

(4.36) Do tính bị chặn của các hàm $u_i,\ i = 0,1,...,N$ trong $L^\infty(0,T;V)$ ta thu được từ (4.36) rằng

$$\|E_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \ \le \ \frac{1}{2}N(4N+1)M^2|\varepsilon|^{N+1} \equiv \widetilde{K}_2|\varepsilon|^{N+1}. \tag{4.37}$$

Cuối cùng ta có kết quả.

Định lý 4.2

Cho $N \ge 1$ *và* $f_1 = u^2$. *Giả sử* $(H_1),(H_2),(H_3)$ *là đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số* $M > 0$ *và* $T > 0$ *sao cho, với mọi* ε, *với* $|\varepsilon| \le 1$, *bài toán* (P_ε) *có duy nhất một nghiệm yếu* $u_\varepsilon \in W_1(M,T)$ *thỏa một đánh giá tiệm cận đến cấp* $N+1$ *như sau*

$$\left\|\dot{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \dot{u}_i\right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\|u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i u_i\right\|_{L^\infty(0,T;V)} \le C_T|\,\varepsilon\,|^{N+1}, \tag{4.38}$$

trong đó, $C_T = \dfrac{2TN(4N+1)M^2}{1-8TM}$ *là hằng số chỉ phụ thuộc* N,M,T *và các hàm* $u_0,u_1,...,u_N$ *lần lượt là các nghiệm yếu của bài toán* $(P_0),(\widetilde{Q}_1),...,(\widetilde{Q}_N)$ *tương ứng với các biểu thức* H_p *xác định bởi* (4.33) - (4.35).

PHẦN KẾT LUẬN

Luận văn sử dụng phương pháp xấp xỉ tuyến tính để khảo sát phương trình sóng phi tuyến với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất. Phương pháp này không những giúp ta chứng minh được sự tồn tại nghiệm, khai triển tiệm cận nghiệm theo tham số nhiễu ε, mà bản thân nó còn cho ta thiết lập nghiệm xấp xỉ tuyến tính hoá bằng một thuật toán giải tích số thích hợp.

Nội dung chính của luận văn là các kết quả mới thu được chứa đựng trong các chương 2, 3 và 4.

Ở chương 2, chúng tôi nghiên cứu phương trình sóng phi tuyến

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T,$$

với giá trị biên và ban đầu

$$\begin{aligned} &u_x(0,t) - h_0 u(0,t) = g_0(t),\ \ u(1,t) = g_1(t),\\ &u_x(x,0) = \tilde{u}_0(x),\quad u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \end{aligned}$$

trong đó h_0 là hằng số không âm cho trước; $g_0, g_1, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, f$ là các hàm cho trước. Chúng tôi thu được kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm bằng phương pháp nói trên với $f \in C^1([0,1]\times[0,\infty)\times IR^3)$.

Trong chương 3, nếu $f(x,t,u,u_x,u_t)$ được thay bởi $f(x,t,u,u_x,u_t)$ $+\varepsilon f_1(x,t,u,u_x,u_t)$, $f \in C^3([0,1]\times[0,\infty)\times IR^3)$, $f_1 \in C^2([0,1]\times[0,\infty)\times IR^3)$, thì chúng tôi thu được nghiệm tương ứng u_ε có một khai triển tiệm cận cấp 3 theo ε, với ε đủ nhỏ.

Trong chương 4, chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận cấp $N+1$ theo ε, với ε đủ nhỏ với $f=\varepsilon f_1(u)$, $f_1 \in C^N(IR)$. Sau đó tính toán cụ thể với $f=\varepsilon u^2$.

Kết quả này là sự tổng quát hoá tương đối các kết quả trước đó trong [1, 3, 4, 9-11] và chuẩn bị công bố.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Boujot J, Alain Phạm Ngọc Định, Veyrier J.P.*, Oscillateurs harmoniques failblement perturbés: L'algorithme numérique des "par de géants", *RAIRO*, *Analyse numérique* **14** (1980), 3-23.

[2] *Caughey T., Ellison J.*, Existence uniqueness and stability of solutions of a class of nonlinear differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **51** (1975), 1-32.

[3] *Alain Phạm Ngọc Định*, Sur un problème hyperbolique faiblement nonlinéaire en dimension1, *Demonstratio Math.*, **16** (1983), 269-289.

[4] *Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long*, Linear approximation an asymtotic expansion associated to the nonlinear wave equation in one dimension, *Demonstratio Math.*, **19** (1986), 45-63.

[5] *Ficken F., Fleishman B.*, Initial value problem and time periodic solutions for a nonlinear wave equation, *Communs Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 331-356.

[6] *Lions J.L.*, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires, *Dunod-Gauthier-Villars, Paris*, 1969.

[7] *Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định*, On the quasilinear wave equation: $u_{tt} - \Delta u + f(u, u_t) = 0$ associated with a mixed nonhomogeneous condition, *Nonlinear Anal.*, **19** (1992), 613-623.

[8] *Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định*, A semilinear wave equation with Cauchy data, *Nonlinear Anal.*, **24** (1995), 1261-1279.

[9] *Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm*, On the nonlinear wave equation $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$ associated with the mixed homogenous conditions, *Nonlinear Anal.*, **29** (1997), 1217-1230.

[10] *Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm*, Linear recursive shemes and asymptotic expansion associated with the Kirchhoff-Carrier operator, *J. Math. Anal. Appl.*, **267**, (2002), 116-134.

[11] *Ortiz. E.L., Alain Phạm Ngọc Định*, Linear recursive schemes associated with some nonlinear partial differential equations in one dimension and Tau method, *SIAM J. Math. Anal.,* **18** (1987), 452-464.

[12] *Rabinowitz P.H.*, Periodic solutions of nonlinear hyperbolic differential equations, *Communs. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 145-205.

[13] *P.A Raviart, J.M Thomas*, Introduction à l'analyse numérique des equations aux dérivées partielles, *Masson, Paris*, 1983.