Phần II

Mô hình toán kinh tế

Chương 1. Giới thiệu các mô hình toán kinh tế

Nội dung

I. Khái niệm mô hình kinh tế và mô hình toán kinh tế

II. Cấu trúc của mô hình toán kinh tế

III. Phân loại mô hình toán kinh tế:

IV. Nội dung của PP mô hình trong nghiên cứu và phân tích kinh tế

V. Phương pháp phân tích mô hình – phân tích so sánh tĩnh

VI. Áp dụng phân tích mô hình trong kinh tế

I. Khái niệm mô hình kinh tế và mô hình toán kinh tế

1. Mô hình kinh tế:

- Mô hình của một đối tượng là sự phản ánh hiện thực khách quan của một đối tượng và việc trình bày, thể hiện, bằng lời văn, sơ đồ, hình vẽ,… hoặc một ngôn ngữ chuyên ngành.

- Mô hình bao gồm nội dung của mô hình và hình thức thể hiện nội dung.

- Mô hình của các đối tượng trong lĩnh vực hoạt động kinh tế gọi là mô hình kinh tế.

2. Mô hình toán kinh tế:

Là mô hình kinh tế được trình bày bằng ngôn ngữ toán học.

⇒ Việc sử dụng ngôn ngữ toán học tạo khả năng áp dụng các phương pháp suy luận, phân tích toán học và kế thừa những thành tựu trong lĩnh vực này cũng như các lĩnh vực khác có liên quan.

Ví dụ:

Giả sử chúng ta muốn nghiên cứu, phân tích quá trình hình thành giá cả một loại hàng hoá A trên thị trường với giả định các yếu tố khác không thay đổi.

$\Rightarrow$ Đối tượng liên quan đến vấn đề cần nghiên cứu là thị trường hàng hoá A và sự vận hành của nó.

Mô hình bằng lời:

- Tại thị trường hàng hoá A, nơi người bán, người mua gặp nhau và xuất hiện mức giá ban đầu. Với mức giá đó lượng hàng hoá người bán muốn bán gọi là mức cung, lượng hàng hoá người mua muốn mua gọi là mức cầu.

- Nếu cung lớn hơn cầu thì người bán phải giảm giá do đó hình thành mức giá mới thấp hơn. Nếu cầu lớn hơn cung thì người mua sẵn sàng trả giá cao hơn để mua được hàng do đó mức giá mới cao hơn được hình thành.

- Với mức giá mới xuất hiện mức cung, mức cầu mới. Quá trình tiếp diễn cho đến khi cung bằng cầu ở một mức giá gọi là giá cân bằng.

Mô hình toán kinh tế:

- Gọi S, D là đường cung, đường cầu tương ứng.
- Ứng với mức giá p ta có: S = S(p); D = D(p)

Ta có mô hình cân bằng thị trường ký hiệu MHIA dưới đây:

S = S(p) $$S'(p) = \frac{dS}{dp} > 0$$

D = D(p) $$D'(p) = \frac{dD}{dp} < 0$$

S = D

Khi muốn đề cập đến tác động của thu nhập (M) và thuế (T) tới quá trình hình thành giá ta có mô hình MHIB dưới đây:

S = S(p, T) $$\frac{\partial S}{\partial p} > 0$$

D = D(p, M, T) $$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial p} < 0$$

S = D

II. Cấu trúc mô hình toán kinh tế:

- Mô hình toán kinh tế là một tập hợp gồm các biến số và các hệ thức toán học liên hệ giữa chúng nhằm diễn tả đối tượng liên quan đến sự kiện, hiện tượng kinh tế.

$\Rightarrow$ Mô hình toán kinh tế gồm: các biến, các phương trình, các bất phương trình.

1. Các biến số của mô hình:

- Biến nội sinh (biến được giải thích):

+ Là các biến phản ánh trực tiếp sự kiện, hiện tượng kinh tế và giá trị của chúng phụ thuộc vào giá trị của các biến khác trong mô hình.

+ Nếu biết giá trị của các biến khác trong mô hình ta có thể xác định giá trị cụ thể của biến nội sinh bằng cách giải các hệ thức.

Ví dụ: Trong mô hình MHIA các biến S, D, p là các biến nội sinh.

- Biến ngoại sinh (biến giải thích)

Là các biến độc lập với các biến khác trong mô hình, giá trị của chúng tồn tại bên ngoài mô hình.

Ví dụ: Trong mô hình MHIB các biến M, T là các biến ngoại sinh.

- **Tham số (thông số):**

  là các biến số mà trong phạm vi nghiên cứu chúng thể hiện các đặc trưng tương đối ổn định, ít biến động.

  Các tham số của mô hình phản ánh xu hướng, mức độ ảnh hưởng của các biến tới các biến nội sinh.

Ví dụ: Nếu trong mô hình MHIB có

$$S = \alpha\, p^{\beta}.T^{\gamma}$$

thì α, β, γ là các tham số của mô hình

Lưu ý: Cùng một biến số, trong các mô hình khác nhau có thể đóng vai trò khác nhau

2. Các phương trình của mô hình:

a. Phương trình định nghĩa: phương trình thể hiện quan hệ định nghĩa giữa các biến số hoặc hai biểu thức ở hai vế của phương trình.

Ví dụ:

+ Lợi nhuận (LN) được định nghĩa là hiệu số của tổng doanh thu (TR) và tổng chi phí (TC):

$$LN = TR - TC$$

+ trong mô hình MHIA, các phương trình

$$S'(p) = \frac{dS}{dp} \qquad D'(p) = \frac{dD}{dp}$$

là các phương trình định nghĩa.

b. Phương trình hành vi:

là phương trình mô tả quan hệ giữa các biến do tác động của các quy luật hoặc do giả định.

- Từ phương trình hành vi ta có thể biết sự biến động của biến nội sinh- “hành vi” của biến này khi các biến số khác thay đổi.

Ví dụ:

Trong mô hình MHIA có S = S(p), D = D(p) là phương trình hành vi

c. Phương trình điều kiện:

Là phương trình mô tả quan hệ giữa các biến số trong các tình huống có điều kiện mà mô hình đề cập.

Ví dụ:

Trong mô hình MHIA, phương trình S = D là phương trình điều kiện vì nó thể hiện điều kiện cân bằng thị trường.

III. Phân loại mô hình toán kinh tế:

1. Phân loại mô hình theo đặc điểm cấu trúc và công cụ toán học sử dụng:

- Mô hình tối ưu:

là mô hình phản ánh sự lựa chọn cách thức hoạt động nhằm tối ưu hoá một hoặc một số chỉ tiêu định trước.

- Mô hình cân bằng:

là lớp mô hình xác định sự tồn tại của trạng thái cân bằng nếu có và phân tích sự biến động của trạng thái này khi các biến ngoại sinh hay các tham số thay đổi.

- Mô hình tất định, mô hình ngẫu nhiên: Mô hình với các biến là tất định (phi ngẫu nhiên) gọi là mô hình tất định, nếu có chưa biến ngẫu nhiên gọi là mô hình ngẫu nhiên.

- Mô hình tĩnh, mô hình động:

- Mô hình có các biến mô tả hiện tượng kinh tế tồn tại ở một thời điểm hay một khoảng thời gian đã xác định gọi là mô hình tĩnh.
- Mô hình mô tả hiện tượng kinh tế trong đó các biến số phụ thuộc vào thời gian gọi là mô hình động.

2. Phân loại mô hình theo quy mô, phạm vi, thời gian:

- **Mô hình vĩ mô:** Mô hình mô tả các hiện tượng kinh tế liên quan đến một nền kinh tế, một khu vực kinh tế gồm một số nước.
- **Mô hình vi mô:** Mô hình mô tả một thực thể kinh tế nhỏ hoặc những hiện tượng kinh tế với các yếu tố ảnh hưởng trong phạm vi hẹp và ở mức độ chi tiết.
- **Theo thời hạn mà mô hình đề cập ta có:** Mô hình ngắn hạn, mô hình dài hạn.

IV. Nội dung cơ bản của phương pháp mô hình

1) Đặt vấn đề

Chúng ta cần diễn đạt rõ vấn đề, hiện tượng nào trong hoạt động kinh tế cần quan tâm, mục đích là gì.

2) Mô hình hóa

- Xác định các yếu tố, sự kiện cần xem xét cùng các mối liên hệ trực tiếp giữa chúng.

- Lượng hóa các yếu tố này, coi chúng là các biến của mô hình.

- Xem xét vai trò của các biến số và thiết lập các hệ thức toán học.

3) Phân tích mô hình

Sử dụng phương pháp phân tích mô hình. Kết quả phân tích có thể dùng để hiệu chỉnh mô hình.

4) Giải thích kết quả

Dựa vào kết quả phân tích mô hình ta sẽ đưa ra giải đáp cho vấn đề cần nghiên cứu.

Ví dụ

Khi điều chỉnh một sắc thuế đánh vào việc sản xuất và tiêu thụ một loại hàng hóa A (tăng thuế suất), Nhà nước quan tâm tới phản ứng của thị trường tới việc điều chỉnh này – thể hiện bởi sự thay đổi của giá cả cũng như lượng hàng hóa lưu thông – và muốn dự kiến trước được phản ứng này, đặc biệt là vấn đề định lượng. Từ đó có căn cứ tính toán mức điều chỉnh thích hợp tránh tình trạng bất ổn của thị trường.

Đặt vấn đề:

Để đáp ứng yêu cầu, chúng ta cần phân tích tác động trực tiếp (ngắn hạn) của thuế đối với việc sản xuất và tiêu thụ loại hàng hóa A.

Mô hình hóa:

Các yếu tố (biến số) ta cần xem xét là mức cung (S), mức cầu (D), giá cả (p) và thuế (T)

Ta có mô hình:

$S = S(p, T)$ ($S' = \partial S/\partial p > 0$)

$D = D(p, T)$ ($D' = \partial D/\partial p < 0$)

$S = D$.

Trong đó S, D, p là các biến nội sinh, T là biến ngoại sinh

Phân tích:

- Pt cân bằng S = D có nghiệm là p^*. Rõ ràng p^* phụ thuộc vào T, nên ta có thể viết $p^*=p^*(T)$.

- Thay p^* vào hàm cung, cầu ta tìm được lượng cân bằng $Q^* = S(p^*(T), T)$, $D = D(p^*(T), T)$

- Với các giả thiết thích hợp về mặt toán học, ta tính được: dp^*/dT, dQ^*/dT và chúng phản ánh tác động của thuế T tới giá và lượng cân bằng.

Giải thích kết quả:

- Để phân tích tác động của thuế T tới giá cả và lượng hàng hóa lưu thông trên thị trường về mặt định tính ta chỉ cần xét dấu của dp^*/dT, dQ^*/dT.

- Nếu muốn đánh giá về lượng ta cần có thông tin, dữ liệu cụ thể của các biến để có thể định dạng chi tiết và ước lượng (dạng số) mô hình.

V. Phương pháp phân tích mô hình – phân tích so sánh tĩnh

- Giải mô hình, tức là giải các phương trình để biểu diễn dưới dạng các biểu thức toán học từng biến nội sinh theo biến ngoại sinh, tham số và có thể là các biến nội sinh khác. Cách biểu diễn này gọi là nghiệm của mô hình.

- Điều chúng ta quan tâm phân tích là khi một biến ngoại sinh thay đổi sẽ tác động như thế nào tới nghiệm. Phân tích này gọi là phân tích so sánh tĩnh.

PP phân tích so sánh tĩnh: Yêu cầu đo lường sự biến động (tức thời) cả về xu hướng, độ lớn của biến nội sinh khi một biến ngoại sinh có sự thay đổi nhỏ, còn các biến ngoại sinh khác không đổi hoặc khi các biến ngoại sinh cùng thay đổi.

1. Đo lường sự thay đổi của biến nội sinh theo biến ngoại sinh

Giả sử nghiệm của mô hình có dạng:

$$Y = F(X, \alpha, \beta, \ldots)$$

Y là biến nội sinh

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ với X_i là các biến ngoại sinh

$\alpha, \beta, \ldots$ là các tham số.

a) Đo lường sự thay đổi tuyệt đối :

- Xét hàm $Y = F(X)$ với $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

Tại điểm X, khi chỉ có X_i thay đổi một lượng nhỏ ΔX_i thì lượng thay đổi của Y là:

$$\Delta Y_i = F(X_1, \dots, X_i + \Delta X_i, \dots, X_n) - F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

Lượng thay đổi trung bình của Y theo X_i

$$\frac{\Delta Y_i}{\Delta X_i}$$

Nếu F khả vi theo X_i thì:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial \mathrm{Xi}} = \lim_{\Delta \mathrm{Xi} \to 0} \frac{\Delta Y_i}{\Delta \mathrm{Xi}}$$

Nếu ΔX_i khá nhỏ thì $\dfrac{\partial F(X)}{\partial \mathrm{Xi}} \approx \dfrac{\Delta Y_i}{\Delta \mathrm{Xi}}$

Nếu $\Delta X_i = 1$ thì $\Delta Y_i \approx \dfrac{\partial F(X)}{\partial \mathrm{Xi}}$

Ví dụ 1: $TC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 100$

Sự thay đổi của TC khi Q tăng(giảm) 1 đơn vị (chi phí cận biên), kí hiệu MC:

$$MC(Q) = 3Q^2 - 12Q + 15$$

- Nếu X_1, X_2,…, X_n thay đổi với các lượng khá nhỏ là: ΔX_1, ΔX_2,…, ΔX_n

$\Rightarrow$ Sự thay đổi của biến nội sinh Y:

$$\Delta Y \approx \frac{\partial F}{\partial X_1}.\Delta X_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2}.\Delta X_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial X_n}.\Delta X_n$$

- Nếu ΔX_1, ΔX_2,…, ΔX_n là các vi phân của biến ngoại sinh ta sử dụng công thức vi phân toàn phần

$$\Delta Y \approx dY = \frac{\partial F}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2}.dX_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial X_n}.dX_n$$

- Nếu X_i là biến nội sinh phụ thuộc vào một hoặc nhiều biến khác thì để đo lường sự thay đổi của biến Y theo sự thay đổi của X_i ta sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp.

Ví dụ 2. $Y = F(X_1, X_2), X_2 = G(X_1)$;

Y, X_2 là biến nội sinh, X_1 là biến ngoại sinh.

Ta có:

$$\frac{dY}{dX_1} = \frac{\partial F}{\partial X_1} + \frac{\partial F}{\partial X_2} \cdot \frac{dX_2}{dX_1}$$

Ví dụ 3. $Y = F(X_1, X_2, X_3)$, $X_2 = G(X_1)$; $X_3 = H(X_1)$, Y, X_2, X_3 là biến nội sinh, X_1 là biến ngoại sinh. Ta có:

$$\frac{dY}{dX_1} = \frac{\partial F}{\partial X_1} + \frac{\partial F}{\partial X_2}.\frac{dX_2}{dX_1} + \frac{\partial F}{\partial X_3}.\frac{dX_3}{dX_1}$$

b) Đo lường sự thay đổi tương đối các biến kinh tế

- Đo tỉ lệ của sự thay đổi (tức thời) của biến nội sinh với sự thay đổi tương đối của 1 biến ngoại sinh, ta dùng hệ số co giãn.

- Hệ số co giãn (riêng) của Y theo X_i tại $X = X^0$:

$$\varepsilon_{X_i}^{Y}(X^0) = \frac{\partial F(X^0)}{\partial X_i} \frac{X_i^0}{F(X^0)}$$

- Ý nghĩa: Hệ số co giãn của Y theo X_i tại điểm X^0 cho biết khi biến X_i thay đổi 1% thì Y thay đổi bao nhiêu %.
- Nếu $\varepsilon_{X_i}^{Y}(X^0) > 0$ thì X_i và Y thay đổi tương đối cùng chiều.
- Nếu $\varepsilon_{X_i}^{Y}(X^0) < 0$ thì X_i và Y thay đổi tương đối ngược chiều.

- Nếu muốn đo lường sự thay đổi của Y khi tất cả các biến ngoại sinh thay đổi cùng một tỷ lệ ta dùng hệ số co giãn chung
- Hệ số co giãn chung (toàn phần) của Y theo các X_i tại $X = X^0$:

$$\varepsilon^{Y}(X^{0}) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{X_i}^{Y}(X^{0})$$

Ví dụ: $$Y = aX_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}$$

$$\varepsilon_{X_i}^{Y}(X) = \frac{\partial F(X)}{\partial X_i} \frac{X_i}{F(X)}$$

$$= a\alpha_i X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_i^{\alpha_i - 1} \ldots X_n^{\alpha_n} \cdot \frac{X_i}{aX_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}} = \alpha_i$$

$$\varepsilon^{Y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

VD: $$Q = aK^{\alpha} L^{\beta} (\alpha, \beta > 0)$$

$$\varepsilon_K^Q(X) = \alpha; \varepsilon_L^Q(X) = \beta \,\&\, \varepsilon^Q = \alpha + \beta$$

Chú ý 1: Nếu U = G(X), V = H(X)

$$Y = UV \Rightarrow \varepsilon_X^Y(X) = \varepsilon_X^U(X) + \varepsilon_X^V(X)$$

$$Y = U/V \Rightarrow \varepsilon_X^Y(X) = \varepsilon_X^U(X) - \varepsilon_X^V(X)$$

Chú ý 2: $MF_i = \partial F / \partial X_i$ là hàm cận biên

$AF_i = Y/X_i$ là hàm trung bình của Y theo X_i

$$\varepsilon_{X_i}^Y(X) = \frac{MF_i}{AF_i}$$

2. Hệ số tăng trưởng (nhịp tăng trưởng)

- Nếu mô hình có biến ngoại sinh là biến thời gian, khi đó sự biến động của biến nội sinh theo thời gian được đo bằng hệ số tăng trưởng(nhịp tăng trưởng):
- $Y = F(X_1, X_2, \ldots, X_n, t)$ t là biến thời gian

Hệ số tăng trưởng của Y (tính %):

$$r_Y = \frac{\frac{\partial Y}{\partial t}}{Y}$$

Hệ số tăng trưởng của Y (r_Y) là tỷ lệ giữa tốc độ tăng của Y so với giá trị hiện tại của bản thân nó.

Ví dụ. Bài toán lãi kép, lượng tiền thu được tại thời điểm t (V_t):

$$V_t = V_0(1+r)^t$$

$\Rightarrow$ Hệ số tăng trưởng của V:

$$r_V = \frac{\frac{\partial V_t}{\partial t}}{V_t} = \frac{V_0(1+r)^t.\ln(1+r)re^{rt}}{V_0(1+r)^t} = \ln(1+r) \approx r$$

Tổng quát

Nếu biến nội sinh phụ thuộc thời gian một cách gián tiếp thông qua sự phụ thuộc vào thời gian của các biến khác, $Y = F(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$

$$r_Y = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{X_i}^{Y} . r_{X_i}$$

3. Hệ số thay thế (bổ sung, chuyển đổi)

- $Y = F(X)$ với $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$
- Tại $X = X^0$, $Y^0 = F(X^0)$, nếu cho 2 biến ngoại sinh thay đổi và cố định các biến khác sao cho Y không đổi ($Y=Y^0$) thì sự thay đổi của 2 biến này phải theo tỷ lệ nào?
- Theo công thức vi phân toàn phần ta có:

$$dY = \frac{\partial F}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2} dX_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial X_n} dX_n$$

Hệ số thay thế của X_i cho X_j

Giả sử ta cho các biến X_i, X_j thay đổi, do Y và X_k ($k \neq i,j$) không đổi nên

$$0 = \frac{\partial F}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial F}{\partial X_j} dX_j$$

$$\Rightarrow \frac{dX_i}{dX_j} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial X_j}}{\dfrac{\partial F}{\partial X_i}}$$

Nếu $\dfrac{dX_i}{dX_j} < 0$ thì ta nói X_i có thể thay thế (chuyển đổi) được cho X_j tại điểm $X = X^0$ với tỷ lệ $\left|\dfrac{dX_i}{dX_j}\right|$

Tỷ lệ này cho biết khi *giảm (tăng) mức X_j một đơn vị* thì phải *tăng (giảm) X_i bao nhiêu đơn vị* để giữ nguyên mức Y, gọi là hệ số thay thế (cận biên) của X_i cho X_j.

Nếu $\frac{dX_i}{dX_j} > 0$ thì ta nói X_i, X_j bổ sung cho nhau tại điểm $X = X^0$ với tỷ lệ $\frac{dX_i}{dX_j}$

Tỷ lệ này cho biết khi *giảm(tăng) mức X_j một đơn vị* thì phải *giảm(tăng) X_i bao nhiêu đơn vị* để giữ nguyên mức Y gọi là hệ số bổ sung (cận biên) của X_i cho X_j.

Nếu $\frac{dX_i}{dX_j} = 0$ thì ta nói X_i, X_j không thể thay thế(hoặc bổ sung) cho nhau tại điểm $X = X^0$.

Ví dụ 1: Một người đi chợ mua M kg thịt bò, P kg khoai tây. Cho biết hàm tổng hữu dụng đối với thịt bò và khoai tây của người này là: $TU = (M – 2).P$

a) Tìm hệ số thay thế giữa thịt bò và khoai tây để hữu dụng không thay đổi.

b) Giả sử người đó mua 3kg thịt bò và 4kg khoai tây, tính hệ số thay thế giữa thịt bò và khoai tây trong trường hợp này. Nêu kết luận về hệ số thay thế này?

a) Hệ số thay thế giữa thịt bò và khoai tây để hữu dụng không thay đổi:

$$\frac{dM}{dP} = -\frac{\frac{\partial TU}{\partial P}}{\frac{\partial TU}{\partial M}} = -\frac{M-2}{P}$$

b) Hệ số thay thế tại điểm (M, P) = (3, 4) sẽ là:

$$k = \frac{dM}{dP} = -\frac{M-2}{P} = -1/4$$

Để tổng hữu dụng TU = (3 – 2).4 = 4 (Đvhd) không thay đổi thì khi tăng (giảm) lượng khoai tây 1 đơn vị thì cần giảm (tăng) 1/4 đơn vị thịt bò.

Tại điểm (M, P) = (3, 4) thì thịt bò và khoai tây là hai mặt hàng có thể thay thế được

Ví dụ 2: Một nhà máy cần 2 yếu tố K, L để sản xuất ra sản phẩm X, biết hàm sản lượng là:

$$Q = 2K (L – 2)$$

a) Xác định tỉ lệ thay thế giữa K và L

b) Tại K = 12 và L = 26, hãy xác định tỉ lệ thay thế và giải thích ý nghĩa của tỉ lệ này? Tại đó K, L là hai yếu tố có thể thay thế, bổ sung hay không thể thay thế?

a) Tỉ lệ thay thế giữa K, L:

$$t = \frac{dK}{dL} = -\frac{2K}{2(L-2)} = -\frac{K}{L-2}$$

b) Tại K = 12 và L = 26 ta có:

t = - 12/24 = - 0,5 < 0

Ý nghĩa: Để sản lượng Q = 2.12(26 – 2) = 576 (sp) không thay đổi thì khi ta giảm lao động đi một đơn vị thì cần tăng vốn lên 0,5 đơn vị

t = - 0,5 < 0 nên tại K = 12, L = 20 thì K, L là hai yếu tố có thể thay thế.

VI. Áp dụng phân tích mô hình trong kinh tế

1. Mô hình hàm sản xuất

2. Mô hình tối ưu về mặt kinh tế

3. Mô hình tối đa hóa lợi nhuận của doanh nghiệp

4. Mô hình hàm thõa dụng:

5. Mô hình cân bằng thị trường:

Mô hình hàm sản xuất

Một doanh nghiệp sử dụng n yếu tố để tạo ra sản phẩm và các yếu tố sử dụng ở mức $X_1, \dots, X_n$ doanh nghiệp thu được Q đơn vị sản phẩm và ta có hàm biểu diễn mối quan hệ này:

$$Q = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Hàm sản xuất dạng Cobb – Douglas với vốn và lao động: $Q = a.K^{\alpha}.L^{\beta}$ với a, α, $\beta > 0$ là các tham số.

Ước lượng hàm sản xuất:

Việt Nam 1986 – 1995: $Q = 75114.K^{0,175}.L^{0,904}\,e^{0,0124t}$

Nước Áo 1951 – 1955: $Q = 2,439.X^{0,0635}.K^{0,0127}.L^{0,3193}$

Mô hình hàm sản xuất

Tác động của các yếu tố sản xuất tới sản lượng:

Cho hàm sản xuất: $Q = F(X_1, X_2, \dots , X_n)$

Năng suất biên của yếu tố i:

$$MP_i = \frac{\partial F}{\partial X_i}$$

Khi cố định các yếu tố khác MP_i cho ta biết khi tăng (giảm) mức sử dụng yếu tố i thì sản lượng sẽ tăng (giảm) bao nhiêu đơn vị .

Năng suất trung bình của yếu tố i: $AP_i = \frac{F(X)}{X_i}$

Hệ số thay thế giữa hai yếu tố: $\frac{dX_i}{dX_j} = -\frac{MP_j}{MP_i}$

Mô hình hàm sản xuất

Giả sử doanh nghiệp chỉ thay đổi được yếu tố X_i còn các yếu tố khác không thay đổi. Thì việc sử dụng yếu tố X_i ở mức có lợi nhất sẽ là:

$$\frac{F(X)}{X_i} \Rightarrow \text{Max}$$

Điều kiện cần để tối ưu là:

$$\left(\frac{F(X)}{X_i}\right)'_{X_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F(X)}{X_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i}$$

Năng suất trung bình = Năng suất biên

Mô hình hàm sản xuất

Về dài hạn doanh nghiệp có thể thay đổi các yếu tố, giả sử các yếu tố đều thay đổi theo cùng một tỉ lệ.

Hàm sản xuất $Q = F(X_1, X_2, \dots , X_n)$ với $\lambda X= (\lambda X_1, \lambda X_2, \dots, \lambda X_n)$ ta nói qui mô sản xuất tăng với hệ số λ.

$F(\lambda X) > \lambda.F(X)$ gọi là tăng qui mô có hiệu quả.

$F(\lambda X) = \lambda.F(X)$ tăng qui mô không thay đổi hiệu quả

$F(\lambda X) < \lambda.F(X)$ tăng qui mô không hiệu quả

Ví dụ 1: Xét hàm sản xuất Cobb – Douglass:

$$Q = a.K^{\alpha}.L^{\beta}$$

Tăng qui mô lên λ lần thì kết quả sản xuất tăng $\lambda^{\alpha+\beta}$ lần

Hiệu quả tăng(giảm, không đổi) theo quy mô khi $\alpha+\beta > 1(<1,=1)$

Hệ số thay thế giữa vốn và lao động:

$$-\frac{MP_K}{MP_L} = -\frac{\alpha}{\beta}.\frac{L}{K}$$

Chương 2: Mô Hình Tối Ưu Tuyến Tính

I. Một số ví dụ thực tế dẫn đến Bài toán quy hoạch tuyến tính (QHTT):

VD 1: Đầu tư tài chính:

Một công ty đầu tư định dùng khoản quỹ đầu tư 500 triệu đồng để mua một số cổ phiếu trên thị trường chứng khoán. Công ty đưa ra các giới hạn trên của số tiền mua từng loại chứng khoán.

Bảng dưới đây cho các số liệu về các giới hạn này cũng như lãi suất của các chứng khoán .

Loại chứng khoán	Lãi suất (trung bình)	Giới hạn mua
A	7%	100 triệu
B	8,5%	300 triệu
C	7,8%	250 triệu
D	8,2%	320 triệu

Để ngăn ngừa rủi ro trong đầu tư, công ty còn quy định khoản đầu tư vào loại cổ phiếu A và C phải chiếm ít nhất là 55%, loại cổ phiếu B phải chiếm ít nhất 15% trong tổng số danh mục đầu tư thực hiện.

Hãy xác định số tiền công ty mua từng loại cổ phiếu sao không vượt quá khoản dự kiến ban đầu, đảm bảo đòi hỏi về đa dạng hoá đồng thời đạt mức lãi (trung bình) cao nhất.

Mô hình hoá:

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là số tiền mua các loại cổ phiếu A, B, C, D.

- Tổng số tiền mua các loại cổ phiếu A, B, C, D:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

- Tổng tiền lãi: $0{,}07x_1 + 0{,}085x_2 + 0{,}078x_3 + 0{,}082x_4$

Ta có bài toán:

Tìm vectơ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sao cho

$$f(x) = 0{,}07x_1 + 0{,}085x_2 + 0{,}078x_3 + 0{,}082x_4 \rightarrow \max$$

và thoả mãn các điều kiện:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 500$$

$$x_1 \leq 100;\ x_2 \leq 300;\ x_3 \leq 250;\ x_4 \leq 320$$

$$x_1 + x_3 \geq 0{,}55(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_2 \geq 0{,}15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

VD 2: Bài toán vận tải

Một công ty kinh doanh xăng dầu hàng tuần cung ứng xăng dầu cho 3 trạm bán lẻ A, B, C. Công ty có thể đưa xăng từ kho I và II. Dự trù cung ứng xăng của kho I là 20 tấn, kho II là 40 tấn.

Chi phí cho việc cung ứng xăng từ kho đến các trạm được cho trong bảng dưới đây:

Đơn vị: Nghìn đồng/tấn

Trạm / kho	A	B	C
I	500	400	700
II	600	500	500

Nhu cầu tiêu thụ xăng hàng tuần của 3 trạm lần lượt là 20, 15, 15 (tấn).

Công ty cần lập kế hoạch cung ứng xăng từ dự trù của các kho đến các trạm để đảm bảo đủ nhu cầu của các trạm với tổng chi phí là nhỏ nhất.

Mô hình hoá:

- Gọi lượng xăng chuyển từ kho I, kho II đến các trạm lần lượt là x_{1A}, x_{1B}, x_{1C} và x_{2A}, x_{2B}, x_{2C} (tấn).
- Tổng lượng xăng chuyển từ kho I đến các trạm: $x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}$
- Tổng lượng xăng chuyển từ kho II đến các trạm: $x_{2A}+x_{2B}+x_{2C}$
- Tổng lượng xăng trạm A nhận được từ 2 kho: $x_{1A} + x_{2A}$
- Tổng lượng xăng trạm B nhận được từ 2 kho: $x_{1B} + x_{2B}$
- Tổng lượng xăng trạm C nhận được từ 2 kho: $x_{1C} + x_{2C}$
- Tổng chi phí tương ứng là:

$$500x_{1A}+400x_{1B}+700x_{1C}+600x_{2A}+500x_{2B}+500x_{2C}$$

Ta có bài toán sau:

Xác định vectơ $x = (x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C})$ sao cho:

$$f(x) = 500x_{1A}+400x_{1B}+700x_{1C}+600x_{2A}+500x_{2B}+500x_{2C} \rightarrow \min$$

Với điều kiện:

$$x_{1A} + x_{2A} = 20$$

$$x_{1B} + x_{2B} = 15$$

$$x_{1C} + x_{2C} = 15$$

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 40$$

$$x_{1A} \geq 0,\ x_{1B} \geq 0,\ x_{1C} \geq 0,\ x_{2A} \geq 0,\ x_{2B} \geq 0,\ x_{2C} \geq 0$$

II. Bài toán QHTT tổng quát và các dạng đặc biệt:

1. Dạng tổng quát: **Tìm x = (x_1, x_2, …, x_n) sao cho**

1) $$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max)$$

2) $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I_1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i \in I_2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in I_3) \end{cases}$$

Nếu ký hiệu D là tập tất cả các vectơ x thoả mãn hệ điều kiện 2) thì đây chính là bài toán tìm min (max) của hàm f(x) trên D.

VD 1: Cho bài toán QHTT

Tìm x = (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho

1) $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$

2) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 & (2) \\ x_2 + x_3 + x_4 \leq 4 & (3) \\ x_2 \geq 0 & (4) \\ x_3 \leq 0 & (5) \\ x_4 \geq 0 & (6) \end{cases}$$

2. Một số khái niệm và định nghĩa:

- f(x): gọi là hàm mục tiêu

- Mỗi phương trình hoặc bất phương trình trong hệ điều kiện 2) gọi là một ràng buộc. Những ràng buộc dạng đặc biệt: $x_j \geq 0$ hay $x_j \leq 0$, gọi là các ràng buộc dấu đối với biến x_j

- Ứng với ràng buộc thứ i ta ký hiệu A^*_i là vectơ dòng có các thành phần là các hệ số của biến x_j

- Một nhóm ràng buộc có hệ vectơ A^*_i tương ứng độc lập tuyến tính được gọi là các ràng buộc độc lập tuyến tính.

- Xét các ràng buộc không phải ràng buộc dấu, hệ vectơ A^*_i tương ứng với các ràng buộc này tạo thành một ma trận, kí hiệu A. Ma trận A có n cột, vectơ cột thứ j – kí hiệu là A_j.

Ví dụ 2:

Xác định $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ sao cho

$$f(x) = 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

$$2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 \geq 2$$

$$-3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 28$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 5)$$

$A^*_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$;

$A^*_2 = (2, 6, -3, 2, -2)$;

$A^*_3 = (-3, 1, 2, -3, 3)$

♦ ***Phương án:***

Một vectơ x thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán gọi là một phương án (PA).

+ **Nếu PA x thoả mãn ràng buộc i với dấu “=" thì ta nói PA x thoả mãn chặt ràng buộc i hay ràng buộc i là chặt đối với PA x.**

+ **Nếu PA x thoả mãn ràng buộc i với dấu “>" (“<") thì ta nói PA x thoả mãn lỏng ràng buộc i hay ràng buộc là lỏng đối với PA x.**

♦ ***Phương án cực biên (PACB):***

Một phương án thoả mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính gọi là phương án cực biên (PACB).

PACB thoả mãn chặt đúng n ràng buộc gọi là PACB không suy biến, thoả mãn chặt hơn n ràng buộc gọi là PACB suy biến.

♦ ***Phương án tối ưu (PATƯ):***

Một phương án mà tại đó trị số hàm mục tiêu đạt cực tiểu (hoặc cực đại) gọi là PATƯ.

Một bài toán có ít nhất một PATƯ gọi là bài toán giải được, bài toán không có PATƯ gọi là bài toán không giải được.

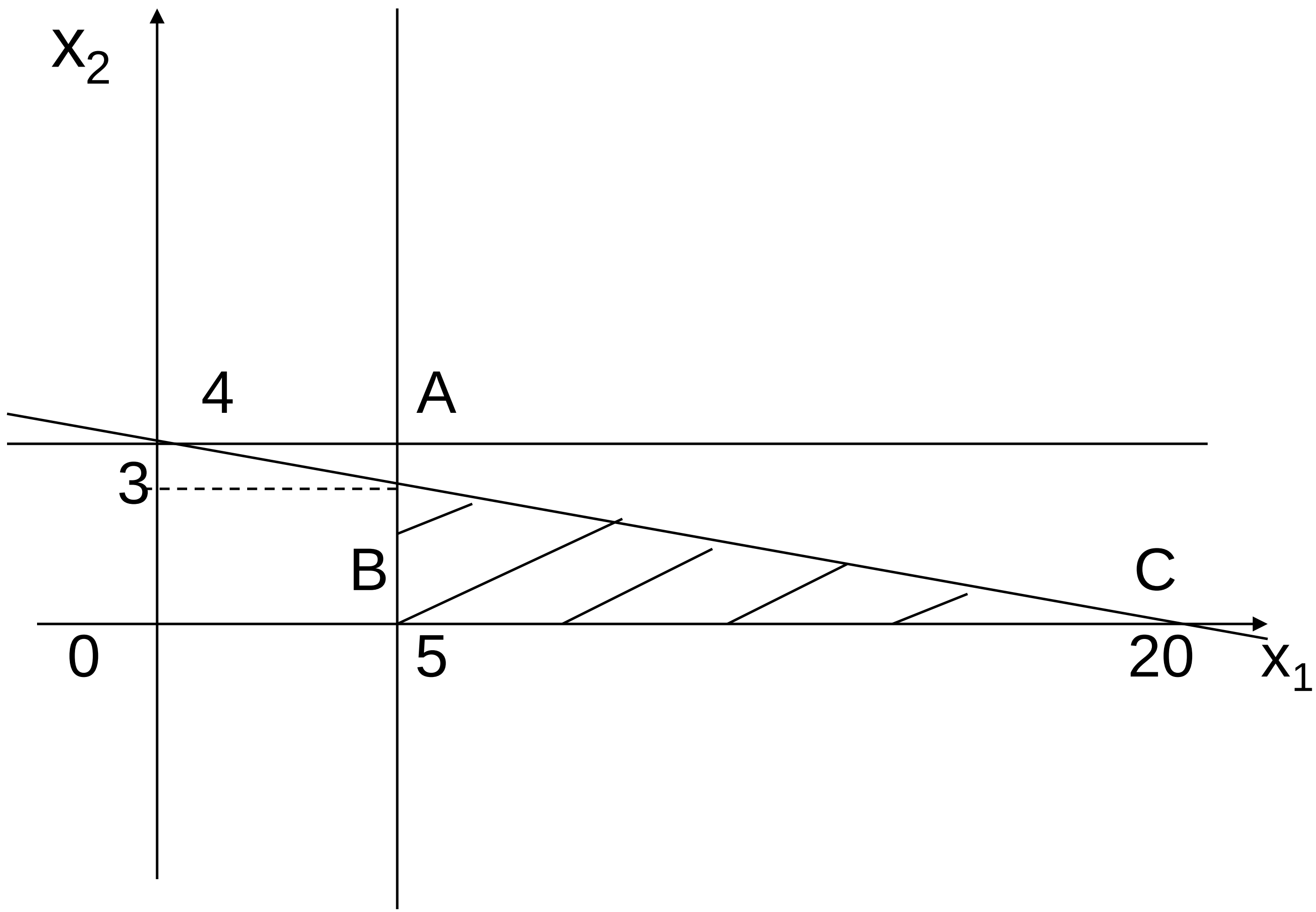
VD 3: **Xét bài toán**

$$f(x) = x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\le 20 \\ x_1 \qquad &\ge 5 \\ x_2 &\le 4 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Bài toán có các PACB: $x^A = (5, 3)$, $x^B = (5, 0)$, $x^C = (20, 0)$

Dùng đồ thị để biểu diễn tập phương án:



3. Các dạng đặc biệt:

a. Bài toán dạng chính tắc:

Tìm vtơ x = (x_1, x_2, …, x_n) sao cho

$$1)\quad f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max)$$

$$2)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i=\overline{1,m}) \\ x_j \ge 0 & (j=\overline{1,n}) \end{cases}$$

Mệnh đề:

Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa về bài toán dạng chính tắc tương đương theo nghĩa trị tối ưu của hàm mục tiêu trong hai bài toán là trùng nhau và từ PA, PATƯ của bài toán này suy ra PA, PATƯ của bài toán kia.

Cách đưa một bài toán về dạng chính tắc:

- **Nếu $x_j \leq 0$ thì đặt $t_j = -x_j \Rightarrow t_j \geq 0$. Nếu biến số x_j không có ràng buộc dấu thì ta đặt $x_j = x'_j - x''_j$ với $x'_j, x''_j \geq 0$**

- **Nếu một ràng buộc có dạng:** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ **thì thay bằng** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_i^p = b_i$ **với** $x_i^p \geq 0$ **và hệ số của** x_i^p **trong f(x) bằng 0.**

- **Tương tự nếu ràng buộc có dạng** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ **thì thay bằng** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_i^p = b_i$ **với** $x_i^p \geq 0$

b. Bài toán dạng chuẩn: **là bài toán có dạng**

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad & + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
x_2 \qquad & + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_m & + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1,n}), b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$$

Btoán có một PACB là $x^0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$

III. Các tính chất chung của bài toán QHTT:

Tính chất 1: Sự tồn tại PACB

Nếu bài toán có PA và hạng của ma trận hệ ràng buộc bằng n thì bài toán có PACB.

Tính chất 2: Sự tồn tại PATƯ

Nếu bài toán có phương án và trị số hàm mục tiêu bị chặn dưới (trên) trên tập phương án thì bài toán có PATƯ (giải được).

Nếu btoán có PACB và giải được thì btoán có PACB tối ưu.

Tính chất 3: Tính hữu hạn của số PACB

Số PACB của mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều hữu hạn.

IV. Phương pháp đơn hình giải bài toán QHTT:

1. Nội dung của phương pháp:

Xuất phát từ một PACB tìm cách đánh giá PACB ấy, nếu nó chưa tối ưu thì tìm cách chuyển sang một PACB mới tốt hơn, quá trình được lặp lại, vì số PACB là hữu hạn nên sau một số hữu hạn bước hoặc sẽ kết luận bài toán không giải được hoặc sẽ tìm được PACB tối ưu.

Ta sẽ xét bài toán dạng chính tắc trong quá trình giới thiệu phương pháp đơn hình.

2. Đặc điểm của PACB của bài toán dạng chính tắc:

Định lý:

PA $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của bài toán dạng chính tắc là cực biên khi và chỉ khi hệ các vectơ $\{A_j / x_j>0\}$ là đ.lập tuyến tính.

Nhận xét:

Không làm mất tính tổng quát ta luôn có thể giả thiết hệ phương trình ràng buộc của bài toán dạng chính tắc gồm m phương trình độc lập tuyến tính với $m < n$, tức $r(A) = m$.

Khi đó một PACB sẽ có không quá m thành phần dương. PACB không suy biến có đúng m thành phần dương, PACB suy biến có ít hơn m thành phần dương.

3. Cơ sở của PACB của bài toán dạng chính tắc:

ĐN: **Ta gọi một hệ m vectơ $\{A_j\}$ độc lập tuyến tính bao hàm hệ các vectơ $\{A_j / x_j > 0\}$ là cơ sở của PACB x.**

Ký hiệu một cách quy ước là J, trong đó

$$J = \{j: A_j \text{ nằm trong cơ sở}\}$$

Chú ý: **PACB x có cơ sở là J, cần phải hiểu:**

- **Số phần tử của J là m**
- **$\{A_j, j \in J\}$ độc lập tuyến tính**
- **$\{A_j, j \in J\} \supset \{A_j, x_j > 0\}$**

Đối với PACB $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cơ sở J ta gọi các thành phần x_j $(j \in J)$ là thành phần cơ sở, x_k $(k \notin J)$ là thành phần phi cơ sở. Dễ thấy $x_k = 0$ $(\forall k \notin J)$.

PACB x, cơ sở J ta có:

- Các vectơ A_k ($k \notin J$) cũng biểu diễn được qua cơ sở J. Gọi các hệ số phân tích của A_k là x_{jk} tức là:

$$A_k = \sum_{j \in J} x_{jk} A_j$$

- Ta xác định đại lượng Δ_k ($k \notin J$) bằng công thức sau

$$\Delta_k = \sum_{j \in J} c_j x_{jk} - c_k$$

- Δ_k được gọi là ước lượng của biến x_k theo cơ sở J.
- Nói riêng thì $\Delta_j = 0 \, (j \in J)$

4. Quan hệ giữa PACB và PA của bài toán dạng ctắc:

Đối với PACB x^0 cơ sở J_0, với mỗi chỉ số $k \notin J_0$ xác định một vectơ z^k – gọi là phương z^k có các thành phần như sau:

$$z^k_j = \begin{cases} -x_{jk} & (j \in J_0) \\ 0 & (j \notin J_0, j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases}$$

Xét sự di chuyển theo phương z^k, tức là xét các vectơ có dạng $x(\theta) = x^0 + \theta.z^k$ với $\theta \geq 0$.

Thay vtơ $x(\theta) = x^0 + \theta.z^k$ vào các phương trình ràng buộc luôn thoả mãn.

Để $x(\theta)$ là PA thì chỉ cần $x(\theta) \geq 0$.

Ta có:

$$x_j(\theta) = \begin{cases} x^0{}_j - \theta . x_{jk} & (j \in J_0) \\ 0 & (j \notin J_0,\ j \neq k) \\ \theta & (j = k) \end{cases}$$

Vậy tóm lại để x(θ) là phương án thì chỉ cần $x^0{}_j - \theta . x_{jk} \geq 0$ $(\forall j \in J_0)$. Có 2 trường hợp xảy ra:

TH 1: Nếu $x_{jk} \leq 0$ $(\forall j \in J_0)$ thì x(θ) là PA $\forall\ \theta \geq 0$. Khi đó ta gọi z^k là phương vô hạn.

TH 2: Nếu $\exists\ x_{jk} > 0$, từ $x^0{}_j - \theta . x_{jk} \geq 0$ ứng với $x_{jk} > 0$, suy ra $\theta \leq x^0{}_j / x_{jk}$. Gọi $\theta_0 = \min\limits_{x_{jk} > 0} \left\{ x^0{}_j / x_{jk} \right\}$

Như vậy x(θ) là PA khi $0 \leq \theta \leq \theta_0$.

Trường hợp này z^k gọi là phương hữu hạn và $x(\theta_0)$ là PACB mới.

Trong cả 2 trường hợp ta luôn có:

$$f(x(\theta)) = f(x^0) - \theta.\Delta_k$$

Với $\theta > 0$ ta có

- **Nếu $\Delta_k > 0$ thì $f(x(\theta)) < f(x^0)$, khi đó z^k gọi là phương giảm.**
- **Nếu $\Delta_k < 0$ thì z^k gọi là phương tăng.**
- **Nếu $\Delta_k = 0$ thì z^k là phương không đổi.**

5. Các định lý cơ bản:

Dưới đây ta xét bài toán dạng chính tắc với hàm mục tiêu f(x) $\rightarrow$ min.

Định lý 1: (Dấu hiệu tối ưu của PACB)

Nếu đối với PACB x^0, cơ sở J_0 của bài toán dạng chính tắc mà $\Delta_k \leq 0$ $(\forall k \notin J_0)$ thì x^0 là PATƯ.

Chú ý:

+) **Nếu $\Delta_k < 0$, $\forall k \notin J_0$ thì x^0 là PATƯ duy nhất.**

+) **Nếu x^0 là PACB không suy biến thì x^0 là PATƯ khi và chỉ khi $\Delta_k \leq 0$ $(\forall k \notin J_0)$.**

Định lý 2: ***(Dấu hiệu bài toán không giải được)***

Nếu đối với PACB x^0 cơ sở J_0 của bài toán dạng chính tắc tồn tại một $\Delta_k > 0$ mà $x_{jk} \leq 0$ $(\forall j \in J_0)$ thì bài toán không giải được.

Định lý 3: ***(Dấu hiệu điều chỉnh PACB)***

Nếu đối với PACB x^0 cơ sở J_0 của bài toán dạng chính tắc mà mỗi $\Delta_k > 0$ đều tồn tại $x_{jk} > 0$ thì có thể chuyển sang một PACB mới tốt hơn trong trường hợp bài toán không suy biến (nghĩa là bài toán mà mọi PACB đều không suy biến).

6. Thuật toán của phương pháp đơn hình:

Giả thiết bài toán dạng chính tắc có hàm mục tiêu $f(x) \to \min$, đã biết một PACB x^0 cơ sở J_0, không làm mất tính tổng quát có thể giả thiết $J_0 = \{1, 2, \ldots, m\}$ tức là cơ sở gồm các vectơ $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.

Thuật toán gồm các bước sau:

Bước 1: Lập bảng đơn hình ứng với PACB x^0

Hệ số	Cơ sở	Phương án	$c_1 \quad c_2 \ldots c_r \ldots c_m \quad c_{m+1} \ldots c_s \ldots c_n$ $x_1 \quad x_2 \ldots x_r \ldots x_m \quad x_{m+1} \ldots x_s \ldots x_n$
c_1	x_1	$x^0{}_1$	$1 \quad 0 \ldots 0 \ldots 0 \quad x_{1,m+1} \ldots x_{1s} \ldots x_{1n}$
c_2	x_2	$x^0{}_2$	$0 \quad 1 \ldots 0 \ldots 0 \quad x_{2,m+1} \ldots x_{2s} \ldots x_{2n}$
…	…	…	… … … … … … … … … … …
c_r	x_r	$x^0{}_r$	$0 \quad 0 \ldots 1 \ldots 0 \quad x_{r,m+1} \ldots [x_{rs}] \ldots x_{rn}$
…	…	…	… … … … … … … … … … …
c_m	x_m	$x^0{}_m$	$0 \quad 0 \ldots 0 \ldots 1 \quad x_{m,m+1} \ldots x_{ms} \ldots x_{mn}$
	$f(x)$	$f(x^0)$	$0 \quad 0 \ldots 0 \ldots 0 \quad \Delta_{m+1} \ldots \Delta_s \ldots \Delta_n$

Bước 2: **Kiểm tra dấu hiệu tối ưu:**

Nếu $\Delta_k \leq 0$, $\forall k \notin J_0$ thì x^0 là PATƯ, nếu tồn tại một $\Delta_k > 0$ thì chuyển sang bước 3.

Bước 3: **Kiểm tra tính không giải được của bài toán:**

Nếu tồn tại một $\Delta_k > 0$ mà $x_{jk} \leq 0$, $\forall\ j \in J_0$ thì bài toán không giải được.

Nếu với mỗi $\Delta_k > 0$ đều có $x_{jk} > 0$ thì chuyển sang bước 4.

Bước 4: Chọn vectơ đưa vào cơ sở và xác định vectơ loại khỏi cơ sở.

+ Chọn vectơ đưa vào:

Giả sử maxΔ_k = Δ_s (Δ_k>0). Vectơ A_s được đưa vào cơ sở.

+ Chọn vectơ loại ra:

Tính $\theta_0 = \min_{j \in J_0, x_{js} > 0} \frac{x_j^0}{x_{js}}$ **, giả sử,** $\theta_0 = \frac{x_r^0}{x_{rs}} (r \in J_0, x_{rs} > 0)$

vectơ A_r bị loại khỏi cơ sở, phần tử trục của phép biến đổi là x_{rs}, trong bảng đóng khung phần tử này.

Thành lập một mẫu bảng đơn hình mới, ở vị trí x_r ghi x_s và ghi c_s thay cho c_r. Chuyển sang bước 5

Bước 5: **Biến đổi bảng:** **Tính các dòng của bảng mới (bắt đầu từ cột thứ 3 trở đi) theo quy tắc sau**

- **Để tính dòng vectơ đưa vào (x_s) trong bảng mới ta lấy dòng vectơ loại ra (x_r) trong bảng cũ chia cho phần tử trục. Dòng này được gọi là dòng chuẩn.**
- **Để tính dòng (x_j) trong bảng mới, ta lấy dòng (x_j) trong bảng cũ trừ đi tích dòng chuẩn với x_{js}**
- **Để tính dòng cuối trong bảng mới ta lấy dòng cuối của bảng cũ trừ đi tích dòng chuẩn với Δ_s**

VD 1: Giải bằng phương pháp đơn hình bài toán

$$f(x) = -4x_1 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 6 & (1) \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 8 & (2) \\ 3x_1 + 5x_4 + 5x_5 \leq 10 & (3) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Giải:

Đưa bài toán về dạng chính tắc.

$$f(x) = -4x_1 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 + 0x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 6 & (1') \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 8 & (2') \\ 3x_1 + 5x_4 + 5x_5 + x_6 = 10 & (3') \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 6)$$

Bài toán trên ở dạng chuẩn, có PACB $x^0=(0, 6, 8, 0, 0, 10)$ cơ sở $J_0 = \{2, 3, 6\}$ là cơ sở đơn vị. Lập bảng đơn hình:

HS	CS	PA	-4 x_1	0 x_2	3 x_3	-1 x_4	-5 x_5	0 x_6	
0	x_2	6	[4]	1	0	4	2	0	
3	x_3	8	2	0	1	3	-3	0	
0	x_6	10	3	0	0	5	5	1	
	f(x)	24	10	0	0	10	-4	0	
-4	x_1	3/2	1	1/4	0	1	1/2	0	dc
3	x_3	5	0	-1/2	1	1	-4	0	
0	x_6	11/2	0	-3/4	0	2	7/2	1	
	f(x)	9	0	-5/2	0	0	-9	0	

Đến bảng đơn hình thứ 2 ta có $\Delta_k \le 0$ ($\forall k \notin J$) nên bài toán có PATƯ x* = (3/2, 0, 5, 0, 0) với f_{min} = f(x*) = 9.

Các chú ý khi áp dụng thuật toán

1) Đối với bài toán có hàm $f(x) \rightarrow max$ thì có thể chuyển về giải bài toán với hàm $g(x) = - f(x) \rightarrow min$, với $f_{max} = - g_{min}$ hoặc cũng có thể giải trực tiếp với dấu hiệu tối ưu là $\Delta_k \geq 0$ $(\forall k \notin J_0)$.

2) Trường hợp bài toán suy biến thì θ_0 có thể bằng 0, khi $\theta_0 = 0$ vẫn thực hiện thuật toán một cách bình thường, nghĩa là vectơ ứng với θ_0 vẫn bị loại khỏi cơ sở.

3) Nếu khi chọn vectơ đưa vào cơ sở hoặc đưa ra khỏi cơ sở có nhiều vectơ thuộc diện lựa chọn thì ta tuỳ chọn một trong số đó.

4) **Khi áp dụng thuật toán sẽ có 2 trường hợp xảy ra:**

TH 1: **Bài toán ở dạng chuẩn, nó cho ngay một PACB x^0, cơ sở J_0 là cơ sở đơn vị, ta đưa toàn bộ các hệ số ở vế trái của các phương trình ràng buộc vào bảng đơn hình và lập được ngay bảng đơn hình đối với PACB này.**

TH 2: **Khi PACB x^0, cơ sở J_0 chưa phải là cơ sở đơn vị, ta phải biến đổi ma trận hệ số mở rộng $\bar{A}$ bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận, đưa các vectơ cơ sở thành các vectơ đơn vị khác nhau. Sau đó đưa toàn bộ các phần tử trong ma trận mở rộng cuối cùng vào trong bảng đơn hình và thực hiện tiếp thuật toán.**

VD 2: Cho bài toán

$$f(x) = -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 5x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 8 \quad (1)$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 \leq 2 \quad (2)$$

$$4x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 \geq 20 \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 4)$$

và vectơ $x^0 = (8, 0, 0, 0)$.

a. Chứng tỏ x^0 là phương án cực biên, lợi dụng x^0 giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

b. Tìm một phương án x có trị số f(x) = - 50.

Giải:

a. Vectơ x^0 thoả mãn mọi ràng buộc của bài toán, thoả mãn chặt ràng buộc (1) và 3 ràng buộc dấu, các ràng buộc này đltt nên x^0 là PACB của bài toán.

Đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$f(x) = -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 - x_6 = 20 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 6)$$

PACB tương ứng $\overline{x}^0 = (8, 0, 0, 0, 18, 12)$ cơ sở $\{A_1, A_5, A_6\}$. Đây không phải là cơ sở đơn vị. Để lập bảng đơn hình ta phải biến đổi ma trận mở rộng $\overline{A}$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & -5 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & -8 & 2 & 0 & -1 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 \to 4d_1 - d_3]{d_2 \to d_2 + 2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

HS	CS	PA	-2 x_1	-6 x_2	8 x_3	-5 x_4	0 x_5	0 x_6	
-2	x_1	8	1	2	-3	1	0	0	
0	x_5	18	0	5	-5	-3	1	0	
0	x_6	12	0	1	-4	[2]	0	1	
	f(x)	-16	0	2	-2	3	0	0	
-2	x_1	2	1	3/2	-1	0	0	-1/2	
0	x_5	36	0	13/2	-11	0	1	3/2	
-5	x_4	6	0	1/2	-2	1	0	1/2	dc
	f(x)	-34	0	1/2	4	0	0	-3/2	

Đến bảng đơn hình thứ 2 ta có $\Delta_3 = 4 > 0$ mà $x_{j3} < 0$ $(\forall j \in J)$ nên bài toán không giải được.

b. Tìm một phương án có trị số f(x) = - 50.

Gọi PA tương ứng ở bảng đơn hình thứ 2 là x*, từ x* di chuyển theo phương z^3 là phương giảm vô hạn ta được các PA có dạng:

$$x(\theta) = x^* + \theta.z^3,\ \theta \geq 0$$

Do đó: $f(x(\theta)) = f(x^*) - \theta.\Delta_3$

Như vậy $-50 = -34 - 4.\theta \Leftrightarrow \theta = 4$

Ta có: $x^* = (2,0,0,6,36,0)$

$z^3 = (1,0,1,2,11,0)$

Vậy PA cần tìm là: $x = (6,0,4,14,80,0)$

V. Tìm phương án cực biên:

Khi bài toán ở dạng chính tắc nhưng không phải dạng chuẩn đồng thời không biết PACB, như vậy muốn áp dụng thuật toán cần tìm một PACB của bài toán.

Xét bài toán dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \, (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \, (j = \overline{1, n})$$

$b_i \geq 0 \; (\forall i = 1 \div m)$

Từ bài toán đã cho xây dựng một bài toán phụ, ký hiệu là P bằng cách cộng vào vế trái phương trình ràng buộc i một biến giả x^g_i ($i = 1 \div m$) với hàm mục tiêu là tổng các biến giả đã thêm vào và hàm mục tiêu này phải đạt cực tiểu.

Ký hiệu $x^g = (x^g_1, x^g_2, \ldots, x^g_m)$ là vectơ các biến giả và hàm mục tiêu của bài toán phụ là $P(x, x^g)$.

Khi đó bài toán phụ có dạng:

$$P(x,x^g)=\sum_{i=1}^{m}x_i^g \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j + x_i^g = b_i (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0(j=\overline{1,n}),\ x_i^g \geq 0(i=\overline{1,m})$$

Nhận xét:

- **Vto x là PA của bài toán xuất phát khi và chỉ khi $(x,x^g=0)$ là PA của bài toán phụ P. Do đó x là PACB của bài toán xuất phát khi và chỉ khi $(x, x^g=0)$ là PACB của bài toán P.**
- **Việc tìm PACB của bài toán xuất phát (nếu có) sẽ dẫn tới tìm PACB của bài toán P có dạng $(x, x^g=0)$.**
- **Bài toán P có dạng chuẩn và $P(x, x^g) \geq 0$, $\forall$ PA (x, x^g) nên bài toán P luôn giải được. Do $P(x, x^g=0)=0$ nên $(x, x^g=0)$ là PATƯ của bài toán P.**

Như vậy: Việc tìm PACB của bài toán xuất phát dẫn tới việc giải bài toán P.

Dùng thuật toán đơn hình giải bài toán P tìm được PATƯ $(\overline{x}, \overline{x}^g)$ **và** $P(\overline{x}, \overline{x}^g) = P_{min}$

Có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: $P_{min} > 0$

Khi đó bài toán xuất phát không có phương án.

TH 2: $P_{min} = 0$

Khi đó $\overline{x}^g_i = 0$ (i = 1÷m) hay $\overline{x}^g = 0$, PATƯ của P có dạng $(\overline{x}, \overline{x}^g = 0)$ do đó $\overline{x}$ là PACB của bài toán xuất phát.

Hai khả năng có thể xảy ra:

a. Trong cơ sở của PACB tối ưu $(\overline{x}, \overline{x}^g = 0)$ không có các vectơ tương ứng với các biến giả. Ta loại các cột x^g_i, tính lại hàng ước lượng Δ_k theo hàm f và tiếp tục thuật toán.

b. Trong cơ sở của PACB TƯ $(\overline{x}, \overline{x}^g = 0)$ có ít nhất một vectơ biến giả.Ta loại các cột ứng với $\Delta_k(P) < 0$ và các cột x^g_i phi cơ sở, sau đó tính lại các ước lượng Δ_k theo theo hàm f và tiếp tục thuật toán.

VD 1: **Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình:**

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 28 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 31 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 4) \end{cases}$$

Giải:

Đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 28 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 31 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 5) \end{cases}$$

Ta thấy bài toán không phải dạng chuẩn nên thành lập bài toán phụ:

$$P(x, x^g) = x^g_1 + x^g_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + \phantom{3x_3 - {}} x_4 + x^g_1 \phantom{{}+ x_5 + x^g_3} &= 28 \\
x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 31 \\
2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x^g_3 &= 16
\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 5),\ x^g \geq 0$$

HS	CS	PA	3 x_1	4 x_2	2 x_3	2 x_4	0 x_5	1 x^g_1	1 x^g_3	
1	x^g_1	28	2	2	0	1	0	1	0	
0	x_5	31	1	5	3	-2	1	0	0	
1	x^g_3	16	[2]	- 2	2	1	0	0	1	
	P	44	4	0	2	2	0	0	0	
1	x^g_1	12	0	[4]	-2	0	0	1		
0	x_5	23	0	6	2	-5/2	1	0		
0	x_1	8	1	-1	1	1/2	0	0		dc
	P	12	0	4	-2	0	0	0		
4	x_2	3	0	1	-1/2	0	0			dc
0	x_5	5	0	0	5	-5/2	1			
3	x_1	11	1	0	1/2	1/2	0			
	f(x)	45	0	0	-5/2	-1/2	0			

Bài toán có PATƯ duy nhất $x^* = (11,3,0,0)$ và $f_{min} = 45$

Khi giải bài toán P cần chú ý một số đặc điểm sau:

- **Khi xây dựng bài toán phụ chỉ cộng thêm biến giả vào những phương trình cần thiết.**
- **Một biến giả đã bị loại khỏi cơ sở thì cột tương ứng không cần tính ở các bước tiếp theo.**
- **Chỉ được áp dụng công thức đổi cơ sở cho hàng ước lượng khi hai bảng kế tiếp có cùng tên hàm mục tiêu.**
- **Khi tất cả các biến giả bị loại khỏi cơ sở thì kết thúc việc giải bài toán P, tính lại dòng ước lương Δ_k theo hàm f và tiếp tục thuật toán.**

VD 2: Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = 45 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 4) \end{cases}$$

Giải:

Lập bài toán phụ:

$$P(x, x^g) = x^g_1 + x^g_2 + x^g_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x^g_1 = 15 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x^g_2 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 + x^g_3 = 45 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 5), \ x^g \geq 0 \end{cases}$$

HS	CS	PA	x_1	x_2	x_3	x_4	1 x^g_1	1 x^g_2	1 x^g_3	
1	x^g_1	15	1	1	2	1	1	0	0	
1	x^g_2	6	0	[2]	1	-2	0	1	0	
1	x^g_3	45	2	5	0	-1	0	0	1	
	P	66	3	8	3	-2	0	0	0	
1	x^g_1	12	1	0	3/2	[2]	1		0	
0	x_2	3	0	1	1/2	-1	0		0	dc
1	x^g_3	30	2	0	-5/2	4	0		1	
	P	42	3	0	-1	6	0		0	
0	x_4	6	1/2	0	3/4	1			0	dc
0	x_2	9	1/2	1	5/4	0			0	
1	x^g_3	6	0	0	-11/2	0			1	
P		6	0	0	-11/2	0			0	

Do P_{min} = 6 >0 nên bài toán k^0 có PA. Vậy bài toán k^0 giải được

VD 3: Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = 6x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 10 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Giải:

Đưa bài toán về dạng chính tắc và lập bài toán P.

$$P(x, x^g) = x^g_2 + x^g_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x^g_2 = 16 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x^g_3 = 8 \\ x_j \ge 0 (j = 1 \div 4);\ x^g_2, x^g_3 \ge 0 \end{cases}$$

	HS	CS	PA	6 x_1	2 x_2	1 x_3	0 x_4	1 x^g_2	1 x^g_3	
	0	x_4	10	2	5	3	1	0	0	
	1	x^g_2	16	4	-3	2	0	1	0	
	1	x^g_3	8	[2]	4	1	0	0	1	
		P	24	6	1	3	0	0	0	
0	0	x_4	2	0	1	[2]	1	0		
0	1	x^g_2	0	0	-11	0	0	1		
6	0	x_1	4	1	2	1/2	0	0		dc
		P	0	0	-11	0	0	0		
		f(x)	24	0		2	0	0		
	1	x_3	1	0		1	1/2	0		dc
	0	x^g_2	0	0		0	0	1		
	6	x_1	7/2	1		0	-1/4	0		
		f(x)	22	0		0	-1	0		

Xét bài toán QHTT:

$$f(x) = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{array}{lll}
5x_1 + 3x_2 + 6x_3 & \geq 8 & (1) \\
-x_1 - 2x_2 & \leq -2 & (2) \\
x_3 & \geq 1/4 & (3) \\
3x_1 + x_2 + x_3 & \geq 4 & (4) \\
-x_1 - x_3 & \leq -1 & (5)
\end{array}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3)$$

Bài toán này nếu giải trực tiếp bằng ph- ơng pháp đơn hình sẽ rất dài, vì khi đó bài toán phụ có 5 ẩn giả. Chính vì vậy mỗi BT QHTT ta đều thành lập một btoán QHTT khác theo một quy tắc nhất định gọi là Bài toán Đối ngẫu của Btoán đã cho và ta sẽ đi nghiên cứu mối q.hệ giữa cặp bài toán đối ngẫu.

VI. Bài toán đối ngẫu

1- Cách thành lập:

a. Cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng:

Xét bài toán dạng chính tắc (I):

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1 \div m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1 \div n)$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán (I), k/h $(\tilde{I})$ có dạng sau:

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j (j = 1 \div n)$$

Nhận xét:

- Nếu f(x) $\rightarrow$ min thì $\tilde{f}(y) \rightarrow$ max và hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu có dạng " ≤ ".
- Nếu f(x) $\rightarrow$ max thì $\tilde{f}(y) \rightarrow$ min và hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu có dạng " ≥ ".
- Số ràng buộc (không kể ràng buộc dấu của bài toán này) bằng số biến số của bài toán kia.
- Hệ số trong hàm mục tiêu của bài toán này là vế phải của hệ ràng buộc trong bài toán kia.
- Ma trận điều kiện trong hai bài toán là chuyển vị của nhau.

Cặp ràng buộc đối ngẫu:

Ta gọi 2 ràng buộc bất đẳng thức (kể cả ràng buộc dấu) trong hai bài toán cùng t- ơng ứng với một chỉ số là một cặp ràng buộc đối ngẫu.

Trong bài toán (I) và $(\tilde{I})$ có n cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$x_j \geq 0 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \left(j = 1 \div n\right)$$

Ví dụ 1: **Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau và chỉ rõ các cặp ràng buộc đối ngẫu:**

$$f(x) = -4x_1 + 3x_2 - 5x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 + 7x_6 = -12 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 6)$$

Bài toán đối ngẫu: $f(y) = -12y_1 + 3y_2 + 7y_3 \rightarrow \max$

$$\begin{array}{lcrr} -2y_2 + 3y_3 & \leq & -4 & (1) \\ 2y_1 + 2y_2 - 3y_3 & \leq & 3 & (2) \\ -y_1 + 5y_2 + 5y_3 & \leq & 0 & (3) \\ 4y_1 - y_3 & \leq & -5 & (4) \\ -2y_1 + 3y_2 + y_3 & \leq & 1 & (5) \\ 7y_1 + 2y_3 & \leq & 0 & (6) \end{array}$$

Ví dụ 2: **Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau:**

$$f(x) = 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned}
-2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6x_4 - 2x_5 &= -14 \\
-x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 &= 8 \\
6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 12
\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \widetilde{1 \div 5})$$

Bài toán đối ngẫu: $f(y) = -14y_1 + 8y_2 + 12y_3 \rightarrow \min$

$$\begin{aligned}
-2y_1 - y_2 + 6y_3 &\geq 0 \quad (1) \\
-3y_1 + 2y_2 - 3y_3 &\geq 5 \quad (2) \\
-y_1 + 5y_2 + 2y_3 &\geq 4 \quad (3) \\
6y_1 - y_3 &\geq -2 \quad (4) \\
-2y_1 + 3y_2 + y_3 &\geq 1 \quad (5)
\end{aligned}$$

Chú ý:

Đối với bài toán bất kỳ thì đ- a về bài toán dạng chính tắc, xây dựng bài toán đối ngẫu của bài toán này và gọi nó là bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho.

b. Cặp bài toán đối ngẫu đối xứng- **Xét bài toán sau gọi là bài toán (II)**

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i\quad\left(i=1\div m\right)$$

$$x_j\ge 0\quad\left(j=1\div n\right)$$

Đưa bài toán (II) về dạng chính tắc, ký hiệu là (II')

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-x_{n+i}=b_i\quad\left(i=1\div m\right)$$

$$x_j\ge 0\quad\left(j=1\div n+m\right)$$

Bài toán đối ngẫu của (II') và cũng là đối ngẫu của (II) ký hiệu $\left(\tilde{II}\right)$ có dạng:

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \left(j = 1 \div n\right)$$

$$y_i \ge 0 \left(i = 1 \div m\right)$$

Hai bài toán (II) và $\left(\tilde{\mathrm{II}}\right)$ có n+m cặp ràng buộc đối ngẫu sau:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \leftrightarrow y_i \ge 0 \left(i = 1 \div m\right)$$

$$x_j \ge 0 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \left(j = 1 \div n\right)$$

Ví dụ 3: Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau:

$$f(x) = -5x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 - x_3 &\geq -14 \\ -2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\geq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\geq 12 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 3)$$

c. Cặp bài toán đối ngẫu tổng quát:

Ta có thể sử dụng các q.tắc nêu trong <u>l□ợc đồ tổng quát</u> d□ới đây để viết trực tiếp bài toán đối ngẫu mà không cần đ□a bài toán về dạng chính tắc.

Lược Đồ Tổng Quát

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$	$\tilde{f}(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i \in I_1\right)$	y_i không có ràng buộc dấu $i \in I_1$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \left(i \in I_2\right)$	$y_i \geq 0 \left(i \in I_2\right)$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \left(i \in I_3\right)$	$y_i \leq 0 \left(i \in I_3\right)$
x_j không có ràng buộc dấu $j \in J_1$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \left(j \in J_1\right)$
$x_j \geq 0 \left(j \in J_2\right)$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \left(j \in J_2\right)$
$x_j \leq 0 \left(j \in J_3\right)$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \left(j \in J_3\right)$

Nhận xét:

+ Nếu một biến số không có ràng buộc dấu trong bài toán này thì ràng buộc t□ơng ứng trong bài toán kia có dấu bằng và ng□ợc lại.

+ Nếu một biến số có ràng buộc dấu trong bài toán này thì ràng buộc t□ơng ứng trong bài toán kia có dấu bất đẳng thức và ng□ợc lại.

+ Chiều của các dấu bất đẳng thức của bài toán đối ngẫu đ□ợc quyết định bởi hàm mục tiêu phải đạt cực đại hay cực tiểu.

+ Nếu $\tilde{f}(y) \to$ ***max và biến số*** y_i ***có ràng buộc dấu thì*** y_i ***và ràng buộc tương ứng cùng chiều "bất đẳng thức".***

Ví dụ 4 : Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau và chỉ rõ các cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$f(x) = -4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{llllllll}
3x_1 & -6x_2 & -x_3 & +2x_4 & +4x_5 & \geq & -15 & (1) \\
-2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -5x_4 & +x_5 & \leq & 8 & (2) \\
 & -6x_2 & +3x_3 & +8x_4 & -4x_5 & = & 9 & (3) \\
3x_1 & +2x_2 & & -3x_4 & +x_5 & \geq & 24 & (4)
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_5 \geq 0$$

Ví dụ 5 : Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau và chỉ rõ các cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$f(x) = -2x_1 + x_2 + 8x_4 \to \max$$

$$\begin{array}{lllllll}
3x_1 & -6x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -5 & (1) \\
x_1 & +5x_2 & & -5x_4 & \geq & 3 & (2) \\
 & -3x_2 & +3x_3 & +8x_4 & = & 2 & (3) \\
3x_1 & +2x_2 & & -3x_4 & \geq & 24 & (4)
\end{array}$$

$$x_2 \leq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \geq 0$$

BT: Cho bài toán:

1) $f(x) = 30x_1 + 23x_2 - 10x_3 \to \max$

2) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 \le -1 & (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 3 & (2) \\ -3x_1 - x_2 + x_3 \le 4 & (3) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le -1 & (4) \\ -x_2 + 4x_3 \le -5 & (5) \\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Hãy viết b.toán đối ngẫu của b.toán đã cho và chỉ rõ các cặp ràng buộc đối ngẫu.

b) Giải b.toán đối ngẫu bằng p.pháp đơn hình

Bài toán đối ngẫu:

$$\tilde{f}(y) = -y_1 + 3y_2 + 4y_3 - y_4 - 5y_5 \to \min$$

$$\begin{aligned}
2y_1 + y_2 - 3y_3 + 2y_4 \quad &= 30 \\
y_2 - y_3 + y_4 - y_5 \quad &= 23 \\
3y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 + 4y_5 \quad &\geq -10
\end{aligned}$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

Giải bài toán đối ngẫu bằng ph- ơng pháp đơn hình. Đ- a bài toán đối ngẫu về dạng chính tắc và lập bài toán phụ:

$$P(y, y^g) = y^g_1 + y^g_2 \to \min$$

$$\begin{aligned}
2y_1 + y_2 - 3y_3 + 2y_4 + y^g_1 \quad &= 30 \\
y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y^g_2 \quad &= 23 \\
-3y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 - 4y_5 + y_6 \quad &= 10
\end{aligned}$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, 6) \ y^g_1, y^g_2 \geq 0$$

HS	CS	PA	-1	3	4	-1	-5	0	1	1	
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y^g_1	y^g_2	
1	y^g_1	30	2	1	-3	[2]	0	0	1	0	
1	y^g_2	23	0	1	-1	1	-1	0	0	1	
0	y_6	10	-3	2	-1	-1	-4	1	0	0	
	P	53	2	2	-4	3	-1	0	0	0	
0	y_4	15	1	1/2	-3/2	1	0	0		0	dc
1	y^g_2	8	-1	1/2	[1/2]	0	-1	0		1	
0	y_6	25	-2	5/2	-5/2	0	-4	1		0	
	P	8	-1	1/2	1/2	0	-1	0		0	
-1	y_4	39	-2	2	0	1	-3	0			
4	y_3	16	-2	1	1	0	-2	0			dc
0	y_6	65	-7	5	0	0	-9	1			
	$\tilde{f}(y)$	25	-5	-1	0	0	0	0			

Bài toán có PATƯ $y^* = (0,0,16,39,0,65)$ và $f_{min} = 25$

2- Các tính chất và định lý đối ngẫu

Xét cặp bài toán đối ngẫu tổng quát với hàm mục tiêu $f(x) \to$ min (max) và $\tilde{f}(y) \to$ max(min).

Tính chất 1:

Với mọi cặp ph- ơng án x và y của hai bài toán đối ngẫu ta luôn có:

$$f(x) \geq \tilde{f}(y)$$
$$(\leq)$$

Tính chất 2:

Nếu đối với hai ph- ơng án x* và y* của 1 cặp bài toán đối ngẫu mà: $f(x^*) = \tilde{f}(y^*)$ thì x* và y* t- ơng ứng là 2 PATƯ.

Định lý 1(Đối ngẫu):

Nếu một trong hai bài toán đối ngẫu giải đ- ợc thì bài toán kia cũng giải đ- ợc và khi đó mọi cặp PATƯ x* và y* ta luôn có: $f\left(x^*\right) = \tilde{f}(y^*)$

Hệ quả 1:

Điều kiện cần và đủ để hai bài toán đối ngẫu giải đ- ợc là mỗi bài toán phải có ít nhất một PA.

Hệ quả 2:

Điều kiện cần và đủ để một bài toán có PA còn một bài toán không có ph- ơng án là trị số hàm mục tiêu của bài toán có ph- ơng án không bị chặn trên tập ph- ơng án của nó.

VD: Cho bài toán:

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \qquad (1)$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \qquad (2)$$

$$(x_j \geq 0,\ j = 1 \div 3)$$

Không giải hãy chứng minh bài toán có pat- .

Chú ý: ***Từ t/c2 và đlý 1 ta suy ra*** **điều kiện cần và đủ để hai PA x* và y* của một cặp BTĐN tối - u là** $f(x^*) = \tilde{f}(y^*)$

Định lý 2 (đối ngẫu):

Điều kiện cần và đủ để hai PA x* và y* của một cặp BTĐN tối - u là trong các cặp ràng buộc đối ngẫu nếu một ràng buộc thoả mãn lỏng thì ràng buộc kia phải thoả mãn chặt.

Hệ quả:

Nếu một ràng buộc là lỏng đối với một PATƯ của bài toán này thì ràng buộc đối ngẫu của nó phải là chặt đối với mọi PATƯ của bài toán kia.

3- Ứng dụng:

a) Phân tích tính chất tối - u của một PA: **Xét xem 1 PA x^o của btoán gốc có phải PATƯ hay không:**

- **Giả sử x^o là PATƯ, theo định lý 2 đối ngẫu, mọi PATƯ y của BTĐN phải thoả mãn chặt các ràng buộc đối ngẫu với các ràng buộc mà x^o thoả mãn lỏng. Tập hợp các ràng buộc này tạo thành hệ p.trình đối với y.**
- **Giải hpt này**
  - **Nếu hệ VN thì x^o không phải là PATƯ.**
  - **Nếu hệ có nghiệm thì phải thử nghiệm đó vào các ràng buộc còn lại của BTĐN.**
    - **Nếu mọi nghiệm đều không thoả mãn thì x^o không phải PATƯ.**
    - **Nếu có 1 nghiệm y^o thoả mãn thì x^o là PATƯ, đồng thời y^o cũng là PATƯ của BTĐN.**

b) Xác định tập PATƯ:

- Nếu x^o là PATƯ của bài toán gốc, theo cách phân tích trên ta xác định đ- ợc tập PATƯ của BTĐN.
- Từ 1 PATƯ nào đó của BTĐN ta xác định đ- ợc tập PATƯ của bài toán gốc.

VD: Cho bài toán:

$$f(x) = 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 \rightarrow \min$$

$$-x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -6 \qquad (1)$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4 \qquad (2)$$

$$4x_1 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 \geq 2 \qquad (3)$$

$$(x_j \geq 0,\ j = 1 \div 5)$$

và véc tơ $x^o = (2, 0, 0, 8, 6)$

a) Viết bài toán đối ngẫu.

b) Phân tích các tính chất của x^o đối với bài toán đã cho.

c) Xác định tập ph- ơng án tối - u và các PACB tối - u của hai bài toán.

Giải:

a) Bài toán đối ngẫu: $\tilde{f}(y) = -6y_1 + 4y_2 + 2y_3 \to \max$

$$
\begin{array}{lr}
-y_1 + 3y_2 + 4y_3 \le 3 & (1') \\
5y_1 - 4y_2 \le 9 & (2') \\
-3y_1 + 2y_2 - y_3 \le -2 & (3') \\
y_1 - y_2 + 2y_3 \le 1 & (4') \\
-2y_1 + y_2 - 3y_3 \le -4 & (5') \\
y_3 \ge 0 &
\end{array}
$$

b) - Vtơ $x^o = (2, 0, 0, 8, 6)$ thoả mãn mọi ràng buộc của bài toán nên nó là PA. PA x^o thoả mãn chặt rb (1), (2) và 2 rb dấu nên x^o không là PACB.

- Giả sử x^o là PATƯ, theo định lý 2 (đối ngẫu), mọi PATƯ y của bài toán đối ngẫu phải t/m:

$$\begin{cases} y_3 = 0 \\ -y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 3 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 = 1 \\ -2y_1 + y_2 - 3y_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ -y_1 + 3y_2 = 3 \\ y_1 - y_2 = 1 \\ -2y_1 + y_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

- Hệ pt trên có nghiệm duy nhất $y^o = (3, 2, 0)$. Thử y^o vào các rb còn lại của BTĐN đều t/m.

- Vậy y^o là PATƯ của BTĐN. Do đó x^o, y^o là 2 PATƯ.

Chương III: Phương Pháp Bảng Cân Đối Liên Ngành

I. Mô hình bảng cân đối liên ngành:

1. Dạng hiện vật:

Khi nghiên cứu quá trình tái sản xuất xã hội, phương pháp bảng cân đối liên ngành xem toàn bộ nền KTQD là một thể thống nhất bao gồm n ngành sản xuất vật chất " thuần tuý" khác nhau.

Giữa các ngành có mối quan hệ qua lại mật thiết thông qua một mô hình toán học phản ánh các mặt của quá trình tái sản xuất.

Gọi

Q_i là tổng sản lượng của ngành i trong năm (i = 1÷n).

- Một phần phân phối cho các ngành khác dưới dạng nguyên, nhiên vật liệu, tư liệu sản xuất trong năm, ký hiệu q_{ij} (i, j=1÷n)

$$\Rightarrow Q_i \geq q_{ij} \geq 0$$

- Phần còn lại là " sản phẩm cuối cùng" của ngành i, ký hiệu q_i (i = 1÷n) dùng để tích luỹ, tiêu dùng cho năm sau ($q_i \geq 0$).

Ta có các phương trình phân phối sản phẩm dạng hiện vật:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} + q_i \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (1)$$

Gọi:

Q_o là tổng đơn vị lao động sống của toàn bộ nền kinh tế quốc dân sử dụng trong năm.

q_{oj} là tổng số đơn vị lao động sử dụng ở ngành j

q_o là tổng số đơn vị lao động sử dụng trong các ngành phi sản xuất.

Ta có: $Q_o > 0$, $q_{oj} > 0$, $q_o > 0$

Phương trình phân phối lao động dạng hiện vật là:

$$Q_0 = \sum_{j=1}^{n} q_{0j} + q_0 \qquad (2)$$

Ghép (1) và (2) được bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật.

Ngành sx	Tổng SL	Đơn vị tính	Phân phối sử dụng ở các ngành 1	2	. . .	n	SP cuối cùng
1	Q_1	KW/h	q_{11}	q_{12}	. . .	q_{1n}	q_1
2	Q_2	1000^T	q_{21}	q_{22}	. . .	q_{2n}	q_2
.	.	.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	.	.	. . .	.	.
n	Q_n	$1000m^3$	q_{n1}	q_{n2}	. . .	q_{nn}	q_n
Lao động	Q_0	Ngày (người)	q_{01}	q_{02}	. . .	q_{0n}	q_0

2. Dạng giá trị:

Gọi:

p_i: **giá trị một đơn vị sản phẩm ngành i (tính theo đơn vị quy ước).**

p_0: **giá trị một đơn vị lao động xã hội.**

Ta có:

- **Tổng giá trị sản lượng trong năm của ngành i là:**

$$X_i = p_i Q_i \qquad (i = 1 \div n)$$

- **Giá trị phần sản phẩm của ngành i cung cấp cho ngành j là**

$$X_{ij} = p_i . q_{ij} \qquad (i, j = 1 \div n)$$

- **Giá trị sản phẩm cuối cùng của ngành i là:**

$$x_i = p_i . q_i \qquad (i = 1 \div n)$$

- **Tổng giá trị lao động sống của toàn xã hội là:**

$$X_0 = p_0 . Q_0$$

- **Giá trị khối lượng lao động sử dụng trong ngành sản xuất thứ j là:**

$$X_{0j} = q_{0j} . p_0$$

- **Giá trị của lao động xã hội của các ngành phi sản xuất vật chất là:** $x_0 = p_0 . q_0$

Ta có các phương trình:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + x_i \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (3)$$

$$X_0 = \sum_{j=1}^{n} X_{0j} + x_0 \qquad (4)$$

(3) là các phương trình phân phối sản phẩm dạng giá trị.

(4) là phương trình phân phối lao động dạng giá trị.

Sau mỗi năm, mỗi ngành sản xuất vật chất đều sáng tạo thêm một phần giá trị mới cho xã hội (gọi là giá trị đóng góp cho xã hội, kí hiệu m_j).

Ta có bảng cân đối liên ngành dạng giá trị:

Ngành SX	Gtrị Tổng sản lượng	Phân phối sử dụng các ngành 1 2 . . . n	Sản phẩm Cuối cùng
1 2 . . . n	X_1 X_2 . . . X_n	X_{11} X_{12} . . . X_{1n} X_{21} X_{22} . . . X_{2n} X_{n1} X_{n2} . . . X_{nn}	x_1 x_2 . . . x_n
Lao động	X_0	X_{01} X_{02} . . . X_{0n}	x_0
Giá trị đóng góp cho xã hội		m_1 m_2 . . . m_n	Năm …

II. Các hệ số chi phí trực tiếp và toàn bộ:

Ta có:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + x_i \qquad (i = \overline{1,n})$$

$$\Rightarrow X_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_{ij}.X_j}{X_j} + x_i \qquad (i = \overline{1,n})$$

Đặt: $a_{ij} = \dfrac{X_{ij}}{X_j} \qquad (j = \overline{1,n}) \Rightarrow 0 \le a_{ij} < 1 \qquad (i, j = \overline{1,n})$

a_{ij}: gọi là hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị

Khi đó ta có: $X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j + x_i \qquad (i = \overline{1,n})$

hay

$$x_i = X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (*)$$

$$x_i = X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (*)$$

Gọi:

E: ma trận đơn vị cấp n

$A=[a_{ij}]_{nxn}$ là ma trận hệ số chi phí trực tiếp

X và x là các ma trận cột có các thành phần là X_i và x_i

$$(*) \Leftrightarrow x = X - AX$$

$$= (E-A)X$$

$$\Rightarrow X = (E-A)^{-1}.x$$

Đặt: $(E-A)^{-1} = B \Rightarrow X = Bx$

$B = [b_{ij}]_{nxn}$ được gọi là ma trận hệ số chi phí toàn bộ.

VD1: Cho ước thực hiện kế hoạch năm t là:

Ngành	X_i	X_{ij}		x_i
1	80	16	32	32
2	100	15	40	45
X_0		10	20	Năm t
m_j		39	8	

a) Tìm ma trận hệ số chi phí trực tiếp

b) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ.

Giải:

a) Tìm A(t):

Tìm $a_{ij}(t) = X_{ij}(t)/X_j(t)$

$a_{11}(t) = X_{11}/X_1 = 16/80 = 0{,}2$

$a_{12}(t) = X_{12}/X_2 = 32/100 = 0{,}32$

$a_{21}(t) = X_{21}/X_1 = 15/80 = 0{,}1875$

$a_{22}(t) = X_{22}/X_2 = 40/100 = 0{,}4$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}32 \\ 0{,}1875 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

b) Tìm B(t)

[E – A(t)] = C= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,32 \\ 0,1875 & 0,4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0,8 & -0,32 \\ -0,1875 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$**[C]$^{-1}$ = B(t) =** $\dfrac{1}{0,42} . \begin{pmatrix} 0,6 & 0,32 \\ 0,1875 & 0,8 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1,4286 & 0,7619 \\ 0,4464 & 1,9048 \end{pmatrix}$$

III. Ứng dụng lập kế hoạch năm sau (dạng A):

Một tình huống có thể xảy ra trong công tác kế hoạch là người ta dự kiến trước những sản phẩm cuối cùng của năm kế hoạch (chính là năm sau, t+1).

Từ mức $x_i(t)$ (t: năm trước), phát triển, mở rộng đến mức $x_i(t+1)$ năm dự kiến kế hoạch ($x_i(t+1)>x_i(t)$)

Việc xây dựng dự án kế hoạch trong tình huống này gọi là lập kế hoạch cân đối dạng A.

Để lập dự án kế hoạch dạng A cho năm t +1 ta làm như sau:

B1: Tìm A(t+1)

Từ ước thực hiện kế hoạch năm t ta tính $a_{ij}(t) = X_{ij}(t)/X_j(t)$ suy ra $a_{ij}(t+1)$ và A(t+1).

B2: Tìm B(t+1)

Tính E – A(t+1) $\Rightarrow$ tính $[E – A(t+1)]^{-1} = B(t+1)$

B3: Tìm X(t+1) = B(t+1).x(t+1)

sẽ tính được các $X_j(t+1)$

B4: Tìm $X_{ij}(t+1)$

$X_{ij}(t+1) = a_{ij}(t+1).X_j(t+1)$

B5: Tìm $X_{oj}(t+1)$

+ Tính $a_{0j}(t) = X_{0j}(t)/X_j(t)$ rồi suy ra $a_{0j}(t+1)$

+ Tính $X_{oj}(t+1) = a_{oj}(t+1).X_j(t+1)$

+ Tính

$$m_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} X_{ij} - X_{0j}$$

VD 2: Cho biết

a) Ước thực hiện kế hoạch năm t thể hiện ở bảng cân đối liên ngành dạng giá trị sau:

(Đơn vị tính: tỷ đồng)

Ngành	X_i	X_{ij}			x_i
1	397,8	159,7	40,1	87,8	110,2
2	197,9			16,5	118,9
3	300,5	80,1	38,7		151,3
X_0		73,7	39,6		Năm t
m_j			58,6	130,2	

b) $a_{ij}(t+1) \approx a_{ij}(t)$; $a_{0j}(t+1) \approx a_{0j}(t)$; $(i,j = 1, 2, 3)$

c) $x(t+1) = (500, 300, 400)$

Hãy hoàn thiện bảng và lập dự án kế hoạch năm t+1 cân đối dạng A

Hãy hoàn thiện bảng và lập dự án kế hoạch năm t+1 cân đối dạng A

Giải:

Hoàn thiện bảng

Ngành	X_i	X_{ij}			x_i
1	397,8	159,7	40,1	87,8	110,2
2	197,9	41,6	20,9	16,5	118,9
3	300,5	80,1	38,7	30.4	151,3
X_0		73,7	39,6	35,6	Năm t
m_j		42,7	58,6	130,2	

B1: **Tìm A(t+1):**

$a_{ij}(t) = X_{ij}(t)/X_j(t)$

$a_{11} = X_{11}/X_1 = 159,7/397,8 = 0,4015$

$a_{12} = X_{12}/X_2 = 40,1/197,9 = 0,2026$

$a_{13} = X_{13}/X_3 = 87,8/300,5 = 0,2922$

$a_{21} = X_{21}/X_1 = 41,6/397,8 = 0,1046$

$a_{22} = X_{22}/X_2 = 20,9/197,9 = 0,1056$

$a_{23} = X_{23}/X_3 = 16,5/300,5 = 0,0549$

$a_{31} = X_{31}/X_1 = 80,1/397,8 = 0,2014$

$a_{32} = X_{32}/X_2 = 38,7/197,9 = 0,1956$

$a_{33} = X_{33}/X_3 = 30,4/300,5 = 0,1012$

$$A(t+1) \approx A(t) = \begin{pmatrix} 0{,}4015 & 0{,}2026 & 0{,}2922 \\ 0{,}1046 & 0{,}1056 & 0{,}0549 \\ 0{,}2014 & 0{,}1956 & 0{,}1012 \end{pmatrix}$$

B2: **Tìm B(t+1)**

$$[E - A(t+1)] = C = \begin{pmatrix} 0{,}5985 & -0{,}2026 & -0{,}2922 \\ -0{,}1046 & 0{,}8944 & -0{,}0549 \\ -0{,}2014 & -0{,}1956 & 0{,}8988 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|C| &= 0{,}5985.0{,}8944.0{,}8988 \\
&\quad +(-0{,}2026).(-0{,}0549).(-0{,}2014) \\
&\quad +(-0{,}1046)(-0{,}1956)(-0{,}2922) \\
&\quad -(-0{,}2014).0{,}8944.(-0{,}2922) \\
&\quad -(-0{,}1046).(-0{,}2026).0{,}8988 \\
&\quad -(-0{,}1956).(-0{,}0549).0{,}5985 \\
&= 0{,}3948
\end{aligned}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0,8944 & -0,0549 \\ -0,1956 & 0,8988 \end{vmatrix}$$ **= 0,7931**

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} -0,1046 & -0,0549 \\ -0,2014 & 0,8988 \end{vmatrix}$$ **= 0,1051**

$$C_{13} = \begin{vmatrix} -0,1046 & 0,8944 \\ -0,2014 & -0,1956 \end{vmatrix}$$ **= 0,2006**

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -0,2026 & -0,2922 \\ -0,1956 & 0,8988 \end{vmatrix}$$ **= 0,2393**

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 0,5985 & -0,2922 \\ -0,2014 & 0,8988 \end{vmatrix}$$ **= 0,4791**

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 0{,}5985 & -0{,}2026 \\ -0{,}2014 & -0{,}1956 \end{vmatrix} \quad \mathbf{= 0{,}1579}$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -0{,}2026 & -0{,}2922 \\ 0{,}8944 & -0{,}0549 \end{vmatrix} \quad \mathbf{= 0{,}2725}$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 0{,}5985 & -0{,}2922 \\ -0{,}1046 & -0{,}0549 \end{vmatrix} \quad \mathbf{= 0{,}0634}$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 0{,}5985 & -0{,}2026 \\ -0{,}1046 & 0{,}8944 \end{vmatrix} \quad \mathbf{= 0{,}5141}$$

C_{11} = 0,7931; C_{21} = 0,2393 ; C_{31} = 0,2725
C_{12} = 0,1051; C_{22} = 0,4791 ; C_{32} = 0,0634
C_{13} = 0,2006; C_{23} = 0,1579 ; C_{33} = 0,5141

$$C^{-1} = B(t+1) = \frac{1}{0,3948}\begin{pmatrix} 0,7931 & 0,2393 & 0,2725 \\ 0,1051 & 0,4791 & 0,0634 \\ 0,2006 & 0,1579 & 0,5141 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2,0089 & 0,6061 & 0,6902 \\ 0,2662 & 1,2135 & 0,1606 \\ 0,5081 & 0,3999 & 1,3022 \end{pmatrix}$$

B3: **X(t+1) = B(t+1). x(t+1)** $= \begin{pmatrix} 2{,}0089 & 0{,}6061 & 0{,}6902 \\ 0{,}2662 & 1{,}2135 & 0{,}1606 \\ 0{,}5081 & 0{,}3999 & 1{,}3022 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1462{,}36 \\ 561{,}39 \\ 894{,}9 \end{pmatrix}$$

B4: Tìm $X_{ij}(t+1)$

$X_{11}(t+1) = 0{,}4015 \times 1462{,}36 = 587{,}1375$

$X_{12}(t+1) = 0{,}2026 \times 561{,}39 = 113{,}7376$

$X_{13}(t+1) = 0{,}2922 \times 894{,}9 = 261{,}4898$

$X_{21}(t+1) = 0{,}1046 \times 1462{,}36 = 152{,}9629$

$X_{22}(t+1) = 0{,}1056 \times 561{,}39 = 59{,}2828$

$X_{23}(t+1) = 0{,}0549 \times 894{,}9 = 49{,}13$

$X_{31}(t+1) = 0{,}2014 \times 1462{,}36 = 294{,}5193$

$X_{32}(t+1) = 0{,}1956 \times 561{,}39 = 109{,}8079$

$X_{33}(t+1) = 0{,}1012 \times 894{,}9 = 90{,}5639$

B5: Tìm $X_{0j}(t+1)$

$a_{01}(t+1) \approx a_{01}(t) = X_{01}/X_1 = 73,7/397,8 = 0,1853$

$a_{02}(t+1) \approx a_{02}(t) = X_{02}/X_2 = 39,6/197,9 = 0,2001$

$a_{03}(t+1) \approx a_{03}(t) = X_{03}/X_3 = 35,6/300,5 = 0,1185$

$X_{01}(t+1) = a_{01}(t+1).\ X_1(t+1)$

$= 0,1853 \times 1462,36 = 270,9753$

$X_{02}(t+1) = a_{02}(t+1).\ X_2(t+1)$

$= 0,2001 \times 561,39 = 112,3341$

$X_{03}(t+1) = a_{03}(t+1).\ X_3(t+1)$

$= 0,1185 \times 894,9 = 106,0457$

Ngành	X_i	X_{ij}			x_i
1	1462,36	587,1375	113,7376	261,4898	500
2	561,39	152,9629	59,2828	49,13	300
3	894,9	294,5193	109,8079	90,5639	400
X_0		270,9753	112,3341	106,0457	Năm t+1
m_j		156,765	166,2276	387,6706	

$m_1 = X_1 - (X_{11}+X_{21}+X_{31}) - X_{01}$

$= 1462,36 - 587,1375 - 152,9629 - 294,5193 - 270,9753$

$= 156,765$

$m_2 = 166,2276$

$m_3 = 387,6706$

Bài 1: Cho biết

a) Ước thực hiện kế hoạch năm t thể hiện ở bảng cân đối liên ngành dạng giá trị sau:

(Đơn vị tính: 1000 triệu đồng)

Ngành	X_i		X_{ij}		x_i
1		350,18	268,47	300,89	100,81
2	750,15	210,5	148,34		130,96
3	890,2		215,51	210,1	74,14
X_0		50,37		75,63	Năm t
m_j		18,85	26,25	43,23	

b) $a_{ij}(t+1) \approx a_{ij}(t)$; $a_{0j}(t+1) \approx a_{0j}(t)$; $(i,j = 1, 2, 3)$

c) $x(t+1) = (120, 150, 100)$

Hãy lập dự án kế hoạch năm t+1 cân đối dạng A

Ngành	X_i	X_{ij}			x_i
1	1020,35	350,18	268,47	300,89	100,81
2	750,15	210,5	148,34	260,35	130,96
3	890,2	390,45	215,51	210,1	74,14
X_0		50,37	91,58	75,63	Năm t
m_j		18,85	26,25	43,23	

B1: **Tìm A(t+1):**

a_{11} = 350,18 / 1020,35 $= 0,3432$

a_{12} = 268,47 / 750,15 $= 0,3579$

a_{13} = 300,89 / 890,2 $= 0,338$

a_{21} = 210,5 / 1020,35 $= 0,2063$

a_{22} = 148,34 / 750,15 $= 0,1977$

a_{23} = 260,35 / 890,2 $= 0,2925$

a_{31} = 390,45 / 1020,35 $= 0,3827$

a_{32} = 215,51 / 750,15 $= 0,2873$

a_{33} = 210,1 / 890,2 $= 0,236$

A(t+1) ≈ A(t)= $\begin{pmatrix} 0,3432 & 0,3579 & 0,338 \\ 0,2063 & 0,1977 & 0,2925 \\ 0,3827 & 0,2873 & 0,236 \end{pmatrix}$

B2: Tìm B(t+1)

[E – A(t+1)] = C = $\begin{pmatrix} 0,6568 & -0,3579 & -0,338 \\ -0,2063 & 0,8023 & -0,2925 \\ -0,3827 & -0,2873 & 0,764 \end{pmatrix}$

|C| = 0,6568.0,8023.0,764 + (-0,3579).(-0,2925).(-0,3827) +

+ (-0,2063)(-0,2873)(-0,338) - (-0,3827).0,8023.(-0,338)

- (-0,2063).(-0,3579).0,764 - (-0,2873).(-0,2925).0,6568

= 0,1271

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0,8023 & -0,2925 \\ -0,2873 & 0,764 \end{vmatrix}$$ **= 0,5289**

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} -0,2063 & -0,2925 \\ -0,3827 & 0,764 \end{vmatrix}$$ **= 0,2696**

$$C_{13} = \begin{vmatrix} -0,2063 & 0,8023 \\ -0,3827 & -0,2873 \end{vmatrix}$$ **= 0,3663**

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -0,3579 & -0,338 \\ -0,2873 & 0,764 \end{vmatrix}$$ **= 0,3705**

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 0,6568 & -0,338 \\ -0,3827 & 0,764 \end{vmatrix}$$ **= 0,3724**

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 0,6568 & -0,3579 \\ -0,3827 & -0,2873 \end{vmatrix}$$ **= 0,3257**

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -0,3579 & -0,338 \\ 0,8023 & -0,2925 \end{vmatrix}$$ **= 0,3759**

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 0,6568 & -0,338 \\ -0,2063 & -0,2925 \end{vmatrix}$$ **= 0,2618**

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 0,6568 & -0,3579 \\ -0,2063 & 0,8023 \end{vmatrix}$$ **= 0,4531**

$$\mathbf{B(t+1) = C^{-1} =} \ \frac{1}{0{,}1271}\begin{pmatrix} 0{,}5289 & 0{,}3705 & 0{,}3759 \\ 0{,}2696 & 0{,}3724 & 0{,}2618 \\ 0{,}3663 & 0{,}3257 & 0{,}4531 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4{,}1613 & 2{,}915 & 2{,}9575 \\ 2{,}1212 & 2{,}93 & 2{,}0598 \\ 2{,}882 & 2{,}5625 & 3{,}5649 \end{pmatrix}$$

B3: **X(t+1) = B(t+1). x(t+1)**

$$= \begin{pmatrix} 4{,}1613 & 2{,}915 & 2{,}9575 \\ 2{,}1212 & 2{,}93 & 2{,}0598 \\ 2{,}882 & 2{,}5625 & 3{,}5649 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1232{,}356 \\ 900{,}024 \\ 1086{,}705 \end{pmatrix}$$

B4: Tìm $X_{ij}(t+1) = a_{ij}(t+1).X_j(t+1)$

$X_{11}(t+1) = 0,3432 \times 1232,356 = 422,9446$

$X_{12}(t+1) = 0,3579 \times 900,024 = 322,1186$

$X_{13}(t+1) = 0,338 \times 1086,705 = 367,3063$

$X_{21}(t+1) = 0,2063 \times 1232,356 = 254,235$

$X_{22}(t+1) = 0,1977 \times 900,024 = 177,9347$

$X_{23}(t+1) = 0,2925 \times 1086,705 = 317,8612$

$X_{31}(t+1) = 0,3827 \times 1232,356 = 471,6226$

$X_{32}(t+1) = 0,2873 \times 900,024 = 258,5769$

$X_{33}(t+1) = 0,236 \times 1086,705 = 256,4624$

B5: Tìm $X_{0j}(t+1)$

$a_{01}(t+1) \approx a_{01}(t) = 50{,}37/1020{,}35 = 0{,}0494$

$a_{02}(t+1) \approx a_{02}(t) = 91{,}58/750{,}15 = 0{,}1221$

$a_{03}(t+1) \approx a_{03}(t) = 75{,}63/890{,}2 = 0{,}085$

$X_{01}(t+1) = 0{,}0494 \times 1232{,}356 = 60{,}8784$

$X_{02}(t+1) = 0{,}1221 \times 900{,}024 = 109{,}8929$

$X_{03}(t+1) = 0{,}085 \times 1086{,}705 = 92{,}3699$

Bảng CĐLN năm t+1

Ngành	X_i	X_{ij}			x_i
1	1232,356	422,9446	322,1186	367,3063	120
2	900,024	254,235	177,9347	317,8612	150
3	1086,705	471,6226	258,5769	256,4624	100
X_0		60,8784	109,8929	92,3699	Năm t+1
m_j		22,6754	31,5009	52,7052	

$m_1 =$ 22,6754

$m_2 =$ 31,5009

$m_3 =$ 52,7052

Bài 2: Cho biết

a) Ước thực hiện kế hoạch năm t thể hiện ở bảng cân đối liên ngành dạng giá trị sau:

(Đơn vị tính: 1000 triệu đồng)

Ngành	X_i	X_{ij}			x_i
1	648,36	150,24	246,54	203,12	48,46
2	820,57	230,17	193,82	293,18	103,4
3	973,15	206,03	346,19	297,84	123,09
X_0		40,26	21,07	113,21	Năm t
m_j		21,66	12,95	65,8	

b) $a_{ij}(t+1) \approx a_{ij}(t)$; $a_{0j}(t+1) \approx a_{0j}(t)$; $(i,j = 1, 2, 3)$

c) $x(t+1) = (96{,}14;\ 165{,}37;\ 195{,}85)$

Hãy lập dự án kế hoạch năm t+1 cân đối dạng A

B1: **Tìm A(t+1):**

a_{11} = 150,24/648,36 $= 0{,}2317$

a_{12} = 246,54/820,57 $= 0{,}3004$

a_{13} = 203,12/973,15 $= 0{,}2087$

a_{21} = 230,17 /648,36 $= 0{,}355$

a_{22} = 193,82 /820,57 $= 0{,}2362$

a_{23} = 293,18 /973,15 $= 0{,}3013$

a_{31} = 206,03 /648,36 $= 0{,}3178$

a_{32} = 346,19 /820,57 $= 0{,}4219$

a_{33} = 297,84 /973,15 $= 0{,}3061$

$$A(t+1) \approx A(t) = \begin{pmatrix} 0{,}2317 & 0{,}3004 & 0{,}2087 \\ 0{,}355 & 0{,}2362 & 0{,}3013 \\ 0{,}3178 & 0{,}4219 & 0{,}3061 \end{pmatrix}$$

B2: Tìm B(t+1)

$$[E - A(t+1)] = C = \begin{pmatrix} 0{,}7683 & -0{,}3004 & -0{,}2087 \\ -0{,}355 & 0{,}7638 & -0{,}3013 \\ -0{,}3178 & -0{,}4219 & 0{,}6939 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 0{,}1249$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0,7638 & -0,3013 \\ -0,4219 & 0,6939 \end{vmatrix}$$ **= 0,4029**

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} -0,355 & -0,3013 \\ -0,3178 & 0,6939 \end{vmatrix}$$ **= 0,3421**

$$C_{13} = \begin{vmatrix} -0,355 & 0,7638 \\ -0,3178 & -0,4219 \end{vmatrix}$$ **= 0,3925**

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -0,3004 & -0,2087 \\ -0,4219 & 0,6939 \end{vmatrix}$$ **= 0,2965**

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 0,7683 & -0,2087 \\ -0,3178 & 0,6939 \end{vmatrix}$$ **= 0,4668**

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 0{,}7683 & -0{,}3004 \\ -0{,}3178 & -0{,}4219 \end{vmatrix}$$ **= 0,4196**

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -0{,}3004 & -0{,}2087 \\ 0{,}7638 & -0{,}3013 \end{vmatrix}$$ **= 0,2499**

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 0{,}7683 & -0{,}2087 \\ -0{,}355 & -0{,}3013 \end{vmatrix}$$ **= 0,3056**

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 0{,}7683 & -0{,}3004 \\ -0{,}355 & 0{,}7638 \end{vmatrix}$$ **= 0,4802**

$$\mathbf{B(t+1) = C^{-1} =} \quad \frac{1}{0{,}1249}\begin{pmatrix} 0{,}4029 & 0{,}2965 & 0{,}2499 \\ 0{,}3421 & 0{,}4668 & 0{,}3056 \\ 0{,}3925 & 0{,}4196 & 0{,}4802 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3{,}2258 & 2{,}3739 & 2{,}0008 \\ 2{,}739 & 3{,}7374 & 2{,}4468 \\ 3{,}1425 & 3{,}3595 & 3{,}8447 \end{pmatrix}$$

B3: **X(t+1) = B(t+1). x(t+1)**

$$= \begin{pmatrix} 3{,}2258 & 2{,}3739 & 2{,}0008 \\ 2{,}739 & 3{,}7374 & 2{,}4468 \\ 3{,}1425 & 3{,}3595 & 3{,}8447 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 96{,}14 \\ 165{,}37 \\ 195{,}85 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1094{,}5569 \\ 1360{,}5871 \\ 1610{,}665 \end{pmatrix}$$

B4: Tìm $X_{ij}(t+1) = a_{ij}(t+1).X_j(t+1)$

$X_{11}(t+1) = 0,2317 \times 1094,5569 = 253,6088$

$X_{12}(t+1) = 0,3004 \times 1360,5871 = 408,7204$

$X_{13}(t+1) = 0,2087 \times 1610,665 = 336,1458$

$X_{21}(t+1) = 0,355 \times 1094,5569 = 388,5677$

$X_{22}(t+1) = 0,2362 \times 1360,5871 = 321,3707$

$X_{23}(t+1) = 0,3013 \times 1610,665 = 485,2934$

$X_{31}(t+1) = 0,3178 \times 1094,5569 = 347,8502$

$X_{32}(t+1) = 0,4219 \times 1360,5871 = 574,0317$

$X_{33}(t+1) = 0,3061 \times 1610,665 = 493,0246$

B5: Tìm $X_{0j}(t+1)$

$a_{01}(t+1) \approx a_{01}(t) = 40,26/648,36 \quad = 0,0621$

$a_{02}(t+1) \approx a_{02}(t) = 21,07/820,57 \quad = 0,0257$

$a_{03}(t+1) \approx a_{03}(t) = 113,21/973,15 = 0,1163$

$X_{01}(t+1) = 0,0621 \times 1094,5569 = 67,972$

$X_{02}(t+1) = 0,0257 \times 1360,5871 = 34,9671$

$X_{03}(t+1) = 0,1163 \times 1610,665 \quad = 187,3203$

Bảng CĐLN năm t+1

Ng	X_i	X_{ij}			x_i
1	1094,5569	253,6088	408,7204	336,1458	96,14
2	1360,5871	388,5677	321,3707	485,2934	165,37
3	1610,665	347,8502	574,0317	493,0246	195,85
X_0		67,972	34,9671	187,3203	Năm t+1
m_j		36,5582	21,4972	108,8809	

m_1 = 36,5582

m_2 = 21,4972

m_3 = 108,8809

Hệ số	Cơ sở	Phương án	c_1 c_2 … c_r … c_m c_{m+1} … c_s … c_n x1 x2 … xr … xm xm+1 … xs … xn
c1	x1	x^0_1	1 0 … 0 … 0 x1,m+1 … x1s … x1n
c2	x2	x01	0 1 … 0 … 0 x2,m+1 … x2s … x2n
…	…	…	… … … … … … … … … … …
cr	xr	x0r	0 0 … 1 … 0 xr,m+1 … [xrs]… xrn
…	…	…	… … … … … … … … … … …
cm	xm	x0m	0 0 … 0 … 1 xm,m+1 … xms … xmn
	f(x)	$f(x^0)$	0 0 … 0 … 0 Δm+1 … Δ s … Δ n