ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

CHÂU ANH DŨNG

NGHIÊN CỨU
MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH NHIỆT PHI TUYẾN TRONG KHÔNG GIAN SOBOLEV CÓ TRỌNG

Luận văn thạc sỹ khoa học
Chuyên ngành Toán giải tích
Mã số 1. 01. 01

Thành phố HỒ CHÍ MINH
2003

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

CHÂU ANH DŨNG

NGHIÊN CỨU
MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH NHIỆT PHI TUYẾN TRONG KHÔNG GIAN SOBOLEV CÓ TRỌNG

Luận văn thạc sỹ khoa học
Chuyên ngành Toán giải tích
Mã số 1. 01. 01

Người hướng dẫn *Tiến sỹ* NGUYỄN THÀNH LONG
Tiến sỹ NGUYỄN CÔNG TÂM
(Khoa Toán – Trường Đại học Khoa học Tự nhiên
Tp HỒ CHÍ MINH)

Người nhận xét

Thành phố HỒ CHÍ MINH
2003

Luận văn được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên

Người hướng dẫn:
TS. Nguyễn Thành Long
và
TS. Nguyễn Công Tâm
Khoa Toán – Tin học, Đại học Khoa học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.

Người nhận xét 1:

Người nhận xét 2:

Học viên cao học: Châu Anh Dũng

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội Đồng chấm luận văn cấp Trường tại Đại học Khoa học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh vào lúc giờ ngày tháng năm 2003

Có thể tìm hiểu luận văn tại Phòng Sau Đại học, thư viện Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.

Thành phố HỒ CHÍ MINH
- 2003-

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, xin trân trọng cảm ơn hai Thầy hướng dẫn tôi là Tiến sĩ Nguyễn Thành Long và Tiến sĩ Nguyễn Công Tâm, các thầy đã tận tình giúp đỡ tôi trong quá trình học tập cũng như trong việc hoàn thành luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn các Thầy, Cô thuộc thuộc Khoa Toán-Tin Học trường Đại học Khoa học Tự nhiên đã tận tình giảng dạy cho tôi trong thời gian học tập.

Xin trân trọng cảm ơn các Tiến sĩ Nguyễn Đình Phư, Tiến sĩ Nguyễn Hội Nghĩa, Tiến sĩ Đặng Đức Trọng và Tiến sĩ Nguyễn Văn Nhân đã đọc luận văn và cho tôi những nhận xét quý báu.

Xin trân trọng cảm ơn Thạc sỹ Bùi Tiến Dũng đã đọc và sửa chữa giúp những sai sót trong bản thảo luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn Phòng Quản lý Khoa học- Hợp tác Quốc tế- Sau Đại học Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên TP. Hồ Chí Minh, Ban Giám Hiệu trường THPT Võ Thị Sáu đã động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn tất chương trình học.

Xin chân thành cảm bạn bè đồng nghiệp, các bạn học lớp Cao học khóa 10 đã luôn động viên và nhiệt tình giúp đỡ tôi trong quá trình học.

Châu Anh Dũng

MỤC LỤC

Trang

CHƯƠNG 1

PHẦN TỔNG QUAN

Trong luận văn này, chúng tôi nghiên cứu một số phương trình nhiệt phi tuyến trong một hình trụ thuộc dạng:

(1.1) $\quad u_t - (u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + F_\varepsilon(u) = f(r,t),\ 0 < r < 1,\ 0 < t < T,$

(1.2) $\quad \left|\lim_{r\to 0^+} \sqrt{r}\, u_r(r,t)\right| < +\infty\ ,\ u_r(1,t) + h(t)\big(u(1,t) - \tilde{u}_o\big) = 0,$

(1.3) $\quad u(r,0) = u_0(r),$

hoặc

$(1.3^/)$ $\quad u(r,0) = u(r,T),$

(1.4) $\quad F_\varepsilon(u) = \varepsilon\, u\left|u\right|^{\frac{1}{2}},$

trong đó $\tilde{u}_o,\ \varepsilon > 0$ là các hằng số cho trước, $h(t), f(r,t)$ là các hàm số cho trước thỏa một số điều kiện ta sẽ chỉ ra sau.
Phương trình (1.1) mô tả quá trình truyền nhiệt trong một dĩa tròn đơn vị $r < 1,$ trong đó

- $u(r,t)$ là nhiệt độ tại mọi điểm trên đường tròn

$C_r = \left\{(x,y)/\,x^2 + y^2 = r^2\right\}$ tại thời điểm t, với $r < 1,\ 0 < t < T.$

- $f(r,t) - F_\varepsilon(u)$ là nguồn nhiệt.

- Điều kiện biên (1.2) trên đường tròn r = 1 mô tả sự trao đổi nhiệt với môi trường bên ngoài, mà môi trường bên ngoài có nhiệt độ không đổi là $\tilde{u}_o$, ở đây hàm h(t) là hệ số trao đổi nhiệt với môi trường bên ngoài.

Trong (1.2), điều kiện $\left|\lim_{r\to 0^+} \sqrt{r}\, u_r(r,t)\right| < +\infty$ sẽ tự động thỏa nếu $u(r,t)$ là nghiệm cổ điển của bài toán, chẳng hạn $u \in C^1\left(\left[0,1\right]\times\left[0,T\right]\right)\cap C^2\left((0,1)\times(0,T)\right)$. Việc đưa điều kiện này vào có liên quan đến việc sử dụng không gian Sobolev có trọng và chuyển đổi về bài toán biến phân. (xem [5,7]).

Với $F_\varepsilon(u) = 0,\ \tilde{u}_0 = 0$, Minasjan [6] đã nghiên cứu phương trình

(1.5) $$u_t - a(t)(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) = f(r,t),\ 0 < r < 1,\ 0 < t < T,$$

với điều kiện biên

(1.6) $$u_r(0,t) = u_r(1,t) + h(t)u(1,t) = 0,$$

và với điều kiện $T-$ tuần hoàn

(1.7) $$u(r,0) = u(r,T),$$

ở đây các hàm a(t), h(t), f(r,t) là $T-$ tuần hoàn theo thời gian t.
Ý nghĩa vật lý của bài toán (1.5) – (1.7) là một dòng nhiệt tuần hoàn trong một hình trụ vô hạn với giả thiết rằng hình trụ phụ thuộc vào sự trao đổi nhiệt một cách tuần hoàn ở bề mặt $(r=1)$ với môi trường bên ngoài có nhiệt độ zéro, phía trong hình trụ, nguồn nhiệt đối xứng trục và thay đổi một cách tuần hoàn, Minasjan [6] đã tìm một nghiệm cổ điển của bài toán này bằng cách dùng biến đổi Fourier. Phương pháp này dẫn đến một hệ giả chính quy vô hạn các phương trình đại số tuyến tính. Tuy nhiên tính giải được của hệ này không được chứng minh chi tiết trong [6].

Trong [3] Lauerova đã chứng minh rằng với dữ kiện $T-$ tuần hoàn, bài toán (1.5) – (1.7) có một nghiệm yếu T- tuần hoàn theo t. Trong trường hợp $\tilde{u}_0 = 0,\ f = 0,\ F_\varepsilon \in C^1(IR),\ F_\varepsilon^/(u) \geq -\beta,\ \ \beta > 0$ đủ nhỏ, các tác giả trong [4] đã chứng minh rằng bài toán (1.1), (1.6), (1.7) có duy nhất một nghiệm yếu $T-$tuần hoàn trong các không gian Sobolev thích hợp. Hơn nữa, nghiệm này cũng phụ thuộc liên tục theo hàm h(t).

Trong luận văn này, chúng tôi nghiên cứu bài toán phi tuyến với điều kiện đầu (1.1) – (1.4) và bài toán điều kiện $T-$ tuần hoàn (1.1), (1.2), (1.4), (1.7).

Nội dung luận văn được trình bày theo thứ tự như sau:

Chương 1 là phần giới thiệu bài toán và nói qua một số kết quả trước đó và trình bày bố cục của luận văn.

Chương 2 là phần trình bày một số ký hiệu, công cụ, các không gian hàm Sobolev có trọng, tính chất các phép nhúng có liên quan.

Chương 3, chúng tôi trình bày chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán (1.1)-(1.4) trong các không gian Sobolev có trọng thích hợp bằng phương pháp Galerkin.

Chương 4, chúng tôi trình bày chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu $T-$tuần hoàn của bài toán (1.1), (1.2), (1.4), (1.7) trong đó bài toán xấp xỉ hữu hạn chiều cho bài toán tìm nghiệm $T-$ tuần hoàn có thể tìm được nhờ vào bài toán điều kiện đầu thông qua một định lý ánh xạ co.

Phần cuối cùng là tóm lược các phần đã trình bày trong luận văn, sau đó là phần tài liệu tham khảo.

CHƯƠNG 2

CÁC KẾT QUẢ CHUẨN BỊ
CÁC KHÔNG GIAN HÀM

II.1. CÁC KHÔNG GIAN HÀM

Đặt $\Omega = (0,1)$, ta bỏ qua định nghĩa các không gian hàm thông dụng: $C^m(\bar{\Omega}), L^p(\Omega), H^m(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$.

Với mỗi hàm $v \in C^0(\bar{\Omega})$ ta định nghĩa $\|v\|$ như sau

(2.1) $$\|v\| \equiv \|v\|_H = \left(\int_0^1 r v^2(r)\, dr \right)^{1/2}.$$

Ta định nghĩa H là đầy đủ hóa của không gian $C^0(\bar{\Omega})$ đối với chuẩn $\|.\|$.

Tương tự, với mỗi hàm $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ta định nghĩa $\|.\|_V$ như sau

(2.2) $$\|v\|_V = \left(\|v\|^2 + \|v'\|^2 \right)^{1/2}$$

và định nghĩa V là đầy đủ hóa của không gian $C^1(\bar{\Omega})$ đối với chuẩn $\|.\|_V$.

Chú ý rằng các chuẩn $\|.\|$ và $\|.\|_V$ lần lượt được sinh ra từ các tích vô hướng

(2.3) $$\langle u, v \rangle = \int_0^1 r\, u(r) v(r)\, dr,$$

(2.4) $$\langle u, v \rangle + \langle u', v' \rangle = \int_0^1 r [u(r) v(r) + u'(r) v'(r)]\, dr.$$

Khi đó, ta dễ dàng chứng minh rằng H, V là các không gian Hilbert.

Bổ đề 2.1. V *trù mật trong* H *với phép nhúng liên tục.*

Chứng minh. Hiển nhiên rằng $\|v\| \le \|v\|_V, \forall v \in V$ do đó phép nhúng từ V vào H là liên tục. Mặt khác $C^1(\overline{\Omega}) \subset V$ và trù mật trong H, do đó V trù mật trong H.

Bổ đề sau cho một số đánh giá thường sử dụng.

Bổ đề 2.2. *Với mọi* $v \in C^1(\overline{\Omega})$, $\varepsilon > 0$ *và* $r \in [0,1]$, *ta có*:

(2.5) $\quad \|v\|^2 \le \|v'\|^2 + v^2(1),$

(2.6) $\quad |v(1)| \le \sqrt{3}\|v\|_V,$

(2.7) $\quad \sqrt{r}\,|v(r)| \le 2\|v\|_V,$

(2.8) $\quad v^2(1) \le \varepsilon\|v'\|^2 + (2 + \frac{1}{\varepsilon})\|v\|^2.$

Chứng minh.

Nghiệm lại (2.5). Dùng tích phân từng phần và chú ý rằng $0 \le r^2 < r \le 1$, ta có

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \int_0^1 r v^2(r)\,dr = \frac{1}{2}v^2(1) - \int_0^1 r^2 v(r) v'(r)\,dr \\
&\le \frac{1}{2}v^2(1) + \int_0^1 r\,|v(r)v'(r)|\,dr \\
&\le \frac{1}{2}v^2(1) + \|v\|\|v'\| \\
&\le \frac{1}{2}v^2(1) + \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|v'\|^2\right).
\end{aligned}$$

Suy ra $\|v\|^2 \le v^2(1) + \|v'\|^2$ và do đó (2.5) được chứng minh.

Nghiệm lại (2.6).

Ta có $\quad v^2(1) = \int_0^1 (r^2 v^2(r))'\,dr$

$$= 2\int_0^1 r v^2(r)\,dr + 2\int_0^1 r^2 v(r)v'(r)\,dr$$

$$\le 2\|v\|^2 + 2\|v\|\|v'\|$$

$$\le 2\|v\|^2 + \|v\|^2 + \|v'\|^2$$

$$\le 3(\|v\|^2 + \|v'\|^2) = 3\|v\|_V^2.$$

Vậy $|v(1)| \le \sqrt{3}\|v\|_V$ và (2.6) được chứng minh.

Nghiệm lại (2.7).

Ta có

$$2\int_r^1 s v(s) v'(s)\,ds = \int_r^1 s\,d(v^2(s))$$

$$= v^2(1) - r v^2(r) - \int_r^1 v^2(s)\,ds \le v^2(1) - r v^2(r).$$

Suy ra

$$r v^2(r) \le v^2(1) - 2\int_r^1 s v(s) v'(s)\,ds$$

$$\le v^2(1) + 2\int_0^1 r\left|v(r)v'(r)\right| dr$$

$$\le v^2(1) + 2\|v\|\|v'\|$$

$$\le v^2(1) + \|v\|^2 + \|v'\|^2$$

$$\le 3\|v\|_V^2 + \|v\|_V^2 = 4\|v\|_V^2.$$

Vậy $\sqrt{r}\,|v(r)| \le 2\|v\|_V$.

Do đó (2.7) được chứng minh.

Nghiệm lại (2.8).

Theo chứng minh (2.6) ta có

$$v^2(1) \le 2\|v\|^2 + 2\|v\|\|v'\| = 2\|v\|^2 + 2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|v\|.\sqrt{\varepsilon}.\|v'\|$$

$$\leq (2+\frac{1}{\varepsilon})\|v\|^2 + \varepsilon \|v'\|^2.$$

Do đó (2.8) được chứng minh.

Bổ đề 2.3.

Ta đồng nhất H *với* H' *(đối ngẫu của* H *). Khi đó ta có*

V $\hookrightarrow$ H $\equiv H' \hookrightarrow V'$, *với các phép nhúng liên tục và nằm trù mật.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh rằng H nhúng trong V'.

Vì $V \subset H$, với mọi $w \in H$, ánh xạ $T_w : V \to R$

xác định bởi $v \mapsto T_w(v) = \langle w, v\rangle = \int_0^1 r\, w(r) v(r)\, dr$

là tuyến tính liên tục trên V, tức là $T_w \in V'$.

Ta xét ánh xạ $T : H \to V'$

$$w \mapsto T(w) = T_w.$$

Khi đó ta có

$$\langle T_w, v\rangle_{V',V} = \langle w, v\rangle, \quad \forall v \in V, \forall w \in H.$$

Ta sẽ chứng minh rằng toán tử T thỏa các tính chất sau

(i) $T : H \to V'$ *là đơn ánh*,

(ii) $\|T_w\|_{V'} \leq \|w\|, \quad \forall w \in H,$

(iii) $T(H) = \{T_w : w \in H\}$ *là trù mật trong* V'.

Chứng minh (i). Dễ thấy rằng T tuyến tính. Nếu $T_w = 0$ thì

$$\langle w, v\rangle = \langle T_w, v\rangle_{V',V} = 0, \quad \forall v \in V.$$

Vì V trù mật trong H, nên ta có

$$\langle w, v\rangle = 0, \quad \forall v \in H.$$

Do đó w = 0. Vậy T là đơn ánh, nghĩa là, một phép nhúng từ H vào V'.

Chứng minh (ii). Ta có với mọi $v \in H$,

$$\| T_w \|_{V'} = \sup_{v\in V, \| v \|_V = 1} \left| \langle T_w, v \rangle \right| = \sup_{v\in V, \| v \|_V = 1} \left| \langle w, v \rangle \right|$$

$$\leq \sup_{v\in V, \| v \|_V = 1} \| w \| \| v \| \leq \sup_{v\in V, \| v \|_V = 1} \| w \| \| v \|_V = \| w \|.$$

Chứng minh (iii). Ta chứng minh rằng mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục trên V' và triệt tiêu trên T(H) thì cũng triệt tiêu trên V'.

Coi $L \in (V')'$ với $\langle L, T_w \rangle_{V'', V'} = 0, \quad \forall T_w \in T(H)$. Ta chứng minh rằng L = 0, thật vậy, do V phản xạ, tức là $(V')' = V$ theo nghĩa

(*) $\quad \forall L \in (V')', \exists l \in V : \langle L, z \rangle_{V'', V'} = \langle z, l \rangle_{V', V}, \forall z \in V'$.

Lấy $z = T_w \in V'$ ta có $0 = \langle L, T_w \rangle_{V'', V'} = \langle w, l \rangle, \forall w \in V$.

Do V trù mật trong H nên ta có $\langle w, l \rangle = 0, \forall w \in H$.

Vậy $l = 0$. Theo (*) ta có

$\langle L, z \rangle_{V'', V'} = \langle z, l \rangle_{V', V} = 0, \quad \forall z \in V'$.

Vậy L triệt tiêu trên V'.

Chú thích 2.1. Từ bổ đề 2.2, ta cũng dùng ký hiệu tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ để chỉ cặp tích đối ngẫu giữa V, V'.

Bổ đề 2.4. *Phép nhúng* V ↪ H *là compact.*

Chứng minh xem [5].

Chú thích 2.2. Từ bổ đề 2.2 suy ra rằng $\left(v^2(1) + \| v' \|^2 \right)^{1/2}$ và $\| v \|_V$ là hai chuẩn tương đương trên V và ta có

(2.9) $$\frac{1}{2} \| v \|_V^2 \leq \| v' \|^2 + v^2(1) \leq 4 \| v \|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Thậy vậy, bất đẳng thức thứ nhất của (2.9) có được là do

$$\|v\|_V^2 = \|v'\|^2 + \|v\|^2 \le \|v'\|^2 + \|v'\|^2 + v^2(1)$$
$$\le 2\left(\|v'\|^2 + v^2(1)\right).$$

Bất đẳng thức còn lại của (2.9) được suy ra từ

$$\|v'\|^2 + v^2(1) \le \|v'\|^2 + 3\|v\|_V^2 \le 4\|v\|_V^2.$$

Ta chú ý rằng

(2.10) $\quad \lim_{r\to 0^+} \sqrt{r}\, v(r) = 0, \forall v \in V.$

(xem [1] trang 128)

Mặt khác, do $H^1(\varepsilon,1) \hookrightarrow C^0\left([\varepsilon,1]\right), \quad 0<\varepsilon<1$ và

(2.11) $\quad \sqrt{\varepsilon}\|v\|_{H^1(\varepsilon,1)} \le \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$

Ta suy ra rằng

(2.12) $\quad v|_{[\varepsilon,1]} \in C^0\left([\varepsilon,1]\right), \quad \forall \varepsilon,\ 0<\varepsilon<1.$

Từ (2.10), (2.12) suy ra

(2.13) $\quad \sqrt{r}\, v \in C^0\left([0,1]\right), \ \forall v \in V.$

II.2. KHÔNG GIAN HÀM $L^p(0,T;X), 1 \le p \le \infty$

Cho X là không gian Banach thực đối với chuẩn $\|.\|_X$.

Ta ký hiệu $L^p(0,T;X), 1\le p\le\infty$, là không gian các lớp tương đương chứa hàm $u:(0,T)\to X$ đo được, sao cho

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty \text{ với } 1 \le p < \infty$$

hay

$$\exists M > 0 : \|u(t)\|_X \le M,\ a.e.\ t \in (0,T) \text{ với } p = \infty.$$

Ta định nghĩa chuẩn trong $L^p(0,T;X), 1 \le p \le \infty$ như sau:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} \quad \text{với } 1 \le p < \infty,$$

và
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = ess \sup_{0<t<T} \|u(t)\|_X$$
$$= \inf \{ M > 0 : \|u(t)\|_X \le M, \; a.e \;\; t \in (0,T) \} \quad \text{với } p = \infty.$$

Khi đó ta có các bổ đề sau đây mà chứng minh của chúng có thể tìm thấy trong Lions [2].

Bổ đề 2.5. $L^p(0,T;X)$ *là không gian Banach.*

Bổ đề 2.6. *Gọi* $X^/$ *là đối ngẫu của* X. *Khi đó với* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^/} = 1,$

$1 < p < \infty, \left(L^p(0,T;X)\right)^/ = L^{p^/}(0,T;X^/)$ *là đối ngẫu của* $L^p(0,T;X)$.

Hơn nữa, nếu X *phản xạ thì* $L^p(0,T;X)$ *cũng phản xạ.*

Bổ đề 2.7. $\left(L^1(0,T;X)\right)^/ = L^\infty(0,T;X^/)$.

Hơn nữa các không gian $L^1(0,T;X), L^\infty(0,T;X^/)$ *không phản xạ.*

Chú thích 2.3. Nếu $X = L^p(\Omega)$ thì $L^p(0,T;X) = L^p(\Omega \times (0,T))$.

Phân bố có giá trị véctơ.

Định nghĩa 2.1. Cho X là một không gian Banach thực. Một ánh xạ tuyến tính liên tục từ D((0,T)) vào X được gọi là một phân bố có giá trị trong X. Tập các phân bố có giá trị trong X ký hiệu là

$$D^/(0,T;X) = L(D(0,T);X)$$
$$= \{ f : D(0,T) \to X \,/\, f \textbf{ tuyến tính và liên tục} \}.$$

Chú thích 2.4. Ta ký hiệu D(0,T) thay cho D((0,T)) hoặc $C_c^\infty((0,T))$ để chỉ không gian các hàm số thực khả vi vô hạn có giá compact trong (0,T).

Định nghĩa 2.2. Cho $f \in D^{/}(0,T;X)$. Ta định nghĩa đạo hàm $\dfrac{df}{dt}$ theo nghĩa phân bố của f bởi công thức

(2.14) $$\left\langle \frac{df}{dt},\varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in D(0,T).$$

Các tính chất.

1/ Cho $v \in L^p(0,T;X)$. Ta làm tương ứng với nó bởi ánh xạ

$T_v : D(0,T) \to X$ như sau:

(2.15) $$\langle T_v, \varphi \rangle = \int_0^T v(t)\varphi(t)\,dt, \quad \forall \varphi \in D(0,T).$$

Ta có thể nghiệm lại rằng $T_v \in D^{/}(0,T;X)$. Thật vậy

i) Ánh xạ $T_v : D(0,T) \to X$ hiển nhiên là tuyến tính.

ii) Ta nghiệm lại ánh xạ $T_v : D(0,T) \to X$ liên tục.

Giả sử $\{\varphi_j\} \subset D(0,T)$ sao cho $\lim\limits_{j\to+\infty} \varphi_j = 0$ trong D(0,T) ta có

$$\left\| \langle T_v, \varphi_j \rangle \right\|_X = \left\| \int_0^T v(t)\varphi_j(t)\,dt \right\|_X \le \int_0^T \| v(t)\varphi_j(t) \|_X \,dt$$

$$\le \left(\int_0^T \| v(t) \|_X^p \,dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \left| \varphi_j(t) \right|^{p^{/}} dt \right)^{\frac{1}{p^{/}}} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

Do đó $\lim\limits_{j\to+\infty} \left\| \langle T_v, \varphi_j \rangle \right\|_X = 0.$ Vậy $T_v \in D^{/}(0,T;X)$.

2/ Ánh xạ $v \mapsto T_v$ là một đơn ánh, tuyến tính từ $L^p(0,T;X)$ vào $D^{/}(0,T;X)$, do đó ta có thể đồng nhất $T_v = v$.

Khi đó ta có kết quả sau.

Bổ đề 2.8. (Lions [2]).

$L^p(0,T;X)\subset D'(0,T;X)$ với phép nhúng liên tục.

Đạo hàm trong $L^p(0,T;X)$.

Do bổ đề 2.8, với $f\in L^p(0,T;X)$ ta có thể coi f và do đó $\dfrac{df}{dt}$ là các phần tử của $D'(0,T;X)$. Ta có các kết quả sau.

Bổ đề 2.9. (Lions [2]).

Nếu $f, f'\in L^1(0,T;X)$ thì f bằng hầu hết với một hàm liên tục từ [0,T] vào X.

Chứng minh bổ đề 2.9 gồm nhiều bước.

Bước 1. Đặt $H(t)=\int_0^t f'(s)ds$. Khi đó $H:[0,T]\to X$ liên tục vì $f'\in L^1(0,T;X)$.

Trước hết ta chứng minh rằng $\dfrac{dH}{dt}=\dfrac{df}{dt}=f'$ theo nghĩa phân bố. Thật vậy, ta có

$$\left\langle \frac{dH}{dt},\varphi\right\rangle=-\left\langle H,\frac{d\varphi}{dt}\right\rangle=-\int_0^T H(t)\frac{d\varphi}{dt}(t)dt \tag{2.17}$$

$$=-\int_0^T\left(\int_0^t f'(s)ds\right)\frac{d\varphi}{dt}(t)dt=-\int_0^T f'(s)ds\int_s^T\frac{d\varphi}{dt}(t)dt$$

$$=\int_0^T f'(s)\varphi(s)\,ds=\left\langle f',\varphi\right\rangle.$$

Vậy $\dfrac{dH}{dt}=\dfrac{df}{dt}=f'$ trong $D'(0,T;X)$.

Bước 2. Ta chứng minh $f=H+C$ theo nghĩa phân bố (C là hằng).

Thật vậy, giả sử $v=H-f$ ta có $v'=0$ theo nghĩa phân bố (do bước 1). Ta sẽ chứng minh rằng $v=C$ theo nghĩa phân bố. Ta có $v'=0$ tương đương với

(2.18) $$\int_0^T v(s)\varphi'(s)\,ds = 0, \quad \forall \varphi \in D(0,T)$$

Cho $\varphi \in D(0,T)$, ta có thể viết φ dưới dạng $\varphi = \lambda\varphi_o + \psi'$, trong đó $\psi \in D(0,T)$, φ_o thỏa $\int_0^T \varphi_o(s)\,ds = 1$, $\lambda = \int_0^T \varphi(t)\,dt$.

Thật vậy, ta có $\int_0^T \left(\varphi(t) - \lambda\varphi_o(t)\right) dt = 0$, nên nguyên hàm của $\varphi(t) - \lambda\varphi_o(t)$ triệt tiêu tại $t = 0$ sẽ thuộc D(0,T).

Chọn $\psi(t) = \int_0^t \left(\varphi(s) - \lambda\varphi_o(s)\right) ds$. Trong (2.18) thay φ' bởi ψ' ta thu được

$$\int_0^T v(s)\psi'(s)\,ds = \int_0^T v(s)[\varphi(s) - \lambda\varphi_o(s)]\,ds = 0, \quad \forall \varphi \in D(0,T)$$

hay

(2.19) $$\int_0^T v(s)\varphi(s)\,ds = \lambda \int_0^T v(s)\varphi_o(s)\,ds$$
$$= \int_0^T \varphi(s)\,ds \int_0^T v(t)\varphi_o(t)\,dt, \quad \forall \varphi \in D(0,T).$$

Đặt $C = \int_0^T v(t)\varphi_o(t)\,dt$ ta suy ra từ (2.19) rằng

$$\int_0^T \left(v(s) - C\right) \varphi(s)\,ds = 0, \quad \forall \varphi \in D(0,T).$$

Vậy $v(t) = C = const$ trong $D'(0,T;X)$.

Bước 3. Ta sử dụng tính chất sau:

Nếu $w \in L^1(0,T;X)$ *và* $\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = 0, \quad \forall \varphi \in D(0,T)$ *thì* $w(t) \equiv 0$ *với hầu hết* $t \in [0,T]$.

Điều này có được là do ánh xạ $w \mapsto T_w$ từ $L^1(0,T;X)$ vào $D^/(0,T;X)$ là đơn ánh (tính chất 2/ ở trên). Ta suy ra rằng $f = H + C$ theo nghĩa phân bố.

Từ các bước 1, 2, 3 ở trên bổ đề 2.9 đã được chứng minh.

Tương tự ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.10. *Nếu* $f, f^/ \in L^p(0,T;X)$ *thì* f *bằng hầu hết với một hàm liên tục từ* [0,T] vào X.

II.3. BỔ ĐỀ VỀ TÍNH COMPACT CỦA LIONS

Cho 3 không gian Banach X_o, X_1, X với $X_o \subset X \subset X_1$ sao cho

(2.20) X_o, X_1 là phản xạ,

(2.21) Phép nhúng $X_o \hookrightarrow$ X là compact.

Với $0 < T < +\infty$, $1 \le p_i \le +\infty$, $i = 0,1$. Ta đặt

(2.22) $W(0,T) = \left\{ v \in L^{p_o}(0,T;X_o) : v^/ \in L^{p_1}(0,T;X_1) \right\}$

Ta trang bị cho W(0,T) bởi chuẩn

(2.23) $\| v \|_{W(0,T)} = \| v \|_{L^{p_o}(0,T;X_o)} + \left\| v^/ \right\|_{L^{p_1}(0,T;X_1)}$

Khi đó W(0,T) là một không gian Banach.

Hiển nhiên $W(0,T) \subset L^{p_0}(0,T;X)$.

Ta cũng có kết quả sau đây liên quan đến phép nhúng compact.

Bổ đề 2.11. (*Bổ đề về tính compact của Lions).*

Với giả thiết (2.20), (2.21) *và nếu* $1 < p_i < \infty$, $i = 0,1$ *thì phép nhúng* $W(0,T) \hookrightarrow L^{p_0}(0,T;X)$ *là compact.*

Chứng minh. Có thể tìm thấy trong Lions [2], trang 57.

II.4. BỔ ĐỀ VỀ SỰ HỘI TỤ YẾU TRONG $L^q(Q)$

Bổ đề 2.12.

Cho Q *là tập mở, bị chặn của* R^{N} *và* $G_m, G \in L^q(Q), 1 < q < +\infty$, *sao cho*

$\| G_m \|_{L^q(Q)} \le C$, *trong đó* C *là hằng số độc lập với* m *và*

$G_m \to G$ *a.e.*(r,t) *trong* Q.

Khi đó $G_m \to G$ *trong* $L^q(Q)$ *yếu.*

II.5. BỔ ĐỀ GRONWALL

Bổ đề cuối cùng này liên quan đến một bất phương trình tích phân, nó rất cần thiết cho việc đánh giá tiên nghiệm trong các chương sau.

Bổ đề 3.13. (*Bổ đề Gronwall*).

Giả sử $f : [0,T] \to R$ *là hàm khả tích, không âm trên* [0,T] *và thỏa bất đẳng thức* $f(t) \le C_1 + C_2 \int_0^t f(s)ds$ *với hầu hết* $t \in [0,T]$ *trong đó* C_1, C_2 *là các hằng số không âm.*

Khi đó $f(t) \le C_1 e^{C_2 t}$ *với hầu hết* $t \in [0,T]$.

Ta cũng dùng các ký hiệu

$u(t), u^{/}(t) = u_t(t), u_r(t) = \nabla u(t), u_{rr}(t),$ lần lượt để chỉ $u(r,t),$ $\frac{\partial u}{\partial t}(r,t),\ \frac{\partial u}{\partial t}(r,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,t)$.

CHƯƠNG 3

NGHIỆM BÀI TOÁN ĐIỀU KIỆN ĐẦU PHI TUYẾN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán giá trị biên và ban đầu (1.1) – (1.4) như sau:

(3.1) $u_t - (u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + F_\varepsilon(u) = f(r,t)\,, 0 < r < 1\,, 0 < t < T\,,$

(3.2) $\left|\lim_{r \to 0^+} \sqrt{r}\, u_r(r,t)\right| < +\infty\,,\ u_r(1,t) + h(t)(u(1,t) - \tilde{u}_o) = 0\,,$

(3.3) $u(r,0) = u_o(r),$

(3.4) $F_\varepsilon(u) = \varepsilon\left|u\right|^{1/2} u\,,$

trong đó $\varepsilon > 0\,, \tilde{u}_o$ là hằng số cho trước, $h(t), f(r,t), u_o(r)$ là các hàm cho trước thỏa các điều kiện sau:

(H_1) $\tilde{u}_o \in R,$

(H_2) $u_o \in H,$

(H_3) $h \in W^{1,\infty}(0,T),$

(H_4) $f \in L^2(0,T,H).$

Không làm mất tính tổng quát ta lấy $\varepsilon = 1.$

Nghiệm yếu của bài toán giá trị biên và ban đầu (3.1) – (3.4) được thành lập như sau:

Tìm $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ sao cho $u(t)$ thỏa bài toán biến phân sau

(3.5) $$\frac{d}{dt}\langle u(t),v\rangle + \langle u_r(t),v_r\rangle + h(t)u(1,t)v(1) + \langle F_1(u(t)),v\rangle$$
$$= \langle f(t),v\rangle + \tilde{u}_o h(t)v(1)\,, \forall v \in V,\ a.e., t \in (0,T),$$

và điều kiện đầu

(3.6) $u(0) = u_o$.

Khi đó ta có định lý sau

Định lý 3.1. *Cho* T > 0 *và* $(H_1) - (H_4)$ *đúng. Khi đó, bài toán* (3.1)-(3.4) có duy nhất một nghiệm yếu $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ *sao cho*

(3.7) $tu \in L^\infty(0,T;V), \quad tu' \in L^2(0,T;H), \quad r^{2/5}u \in L^{5/2}(Q_T)$.

Chứng minh. Gồm nhiều bước.

Bước 1. *Phương pháp Galerkin.*

Lấy $\{w_j\}, j = 1,2,...$ là một cơ sở trực chuẩn trong không gian Hilbert tách được V. Ta tìm $u_m(t)$ theo dạng

(3.8) $$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) w_j,$$

trong đó $c_{mj}(t),\ 1 \le j \le m$ thỏa hệ phương trình vi phân phi tuyến

(3.9) $$\begin{aligned} &\left\langle u_m'(t), w_j \right\rangle + \left\langle u_{mr}(t), w_{jr} \right\rangle + h(t) u_m(1,t) w_j(1) \\ &+ \left\langle F_1(u_m(t)), w_j \right\rangle = \left\langle f(t), w_j \right\rangle + \tilde{u}_o h(t) w_j(1), 1 \le j \le m, \end{aligned}$$

(3.10) $u_m(0) = u_{om}$,

trong đó

(3.11) $u_{om} \to u_o$ mạnh trong H.

Dễ thấy rằng với mỗi m, tồn tại một nghiệm $u_m(t)$ có dạng (3.8) thỏa (3.9) và (3.10) hầu khắp nơi trên $0 \le t \le T_m$, với một T_m nào đó, $0 < T_m \le T$.

Các đánh giá tiên nghiệm sau đây cho phép ta lấy $T_m = T$ với mọi m.

Bước 2. *Đánh giá tiên nghiệm.*

Ta sẽ lần lượt thiết lập hai đánh giá tiên nghiệm dưới đây. Khó khăn chính ở phần này là số hạng phi tuyến $F_1(u_m(t)) = |u_m(t)|^{1/2} u_m(t)$ tham gia vào phương trình do đó việc đánh giá tính bị chặn và qua giới hạn của số hạng này cũng là một khó khăn. Tuy nhiên, với số hạng phi tuyến cụ thể trong trường hợp này không gây ra nhiều trở ngại so với số hạng phi tuyến tổng quát.

a) **Đánh giá 1**. Nhân phương trình thứ j của hệ (3.9) với $c_{mj}(t)$ và tổng theo j, ta có

$$(3.12)\quad \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\|u_{mr}(t)\|^2 + 2u_m^2(1,t) + 2\int_0^1 r|u_m(r,t)|^{5/2}dr = 2(1-h(t))u_m^2(1,t) + 2\langle f(t), u_m(t)\rangle + 2\tilde{u}_o h(t) u_m(1,t)$$

Từ bất đẳng thức (2.9), ta suy ra rằng

$$(3.13)\quad 2\|u_{mr}(t)\|^2 + 2u_m^2(1,t) \geq \|u_m(t)\|_V^2.$$

Ta suy từ (3.12), (3.13) rằng

$$(3.14)\quad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \|u_m(t)\|_V^2 + 2\int_0^1 r|u_m(r,t)|^{5/2}dr \\ &\leq 2|1-h(t)|\left[\beta\|u_{mr}(t)\|^2 + (2+1/\beta)\|u_m(t)\|^2\right] \\ &\quad + 2\|f(t)\|\|u_m(t)\| + 2|\tilde{u}_o h(t)|\sqrt{3}\|u_m(t)\|_V \\ &\leq 2\left(1+\|h\|_{L^\infty(0,T)}\right)\left[\beta\|u_m(t)\|_V^2 + (2+1/\beta)\|u_m(t)\|^2\right] \end{aligned}$$

$$+\| f(t)\|^2 + \| u_m(t)\|^2 + \frac{3}{2\beta}|\tilde{u}_o|^2 \| h\|^2_{L^\infty(0,T)} + 2\beta \| u_m(t)\|^2_V$$

$$= \frac{3}{2\beta}|\tilde{u}_o|^2 \| h\|^2_{L^\infty(0,T)} + \| f(t)\|^2 + 2\beta\left(2 + \| h\|_{L^\infty(0,T)}\right)\| u_m(t)\|^2_V$$

$$+\left[1 + 2(2+1/\beta)(1+\| h\|_{L^\infty(0,T)})\right]\| u_m(t)\|^2, \quad \forall \beta > 0.$$

Chọn $\beta > 0$ sao cho

(3.15) $\quad 2\beta\,(2 + \| h\|_{L^\infty(0,T)}) \le 1/2.$

Từ (3.14), (3.15) ta được

(3.16)
$$\frac{d}{dt}\| u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\| u_m(t)\|^2_V + 2\int_0^1 r|u_m(r,t)|^{5/2}dr$$
$$\le \frac{3}{2\beta}|\tilde{u}_o|^2 \| h\|^2_{L^\infty(0,T)} + \| f(t)\|^2$$
$$+\left[1 + 2(2+1/\beta)(1+\| h\|_{L^\infty(0,T)})\right]\| u_m(t)\|^2.$$

Lấy tích phân (3.16) theo t, và sử dụng (3.10), (3.11) ta có

(3.17)
$$\| u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \| u_m(s)\|^2_V ds + 2\int_0^t ds\int_0^1 r|u_m(r,s)|^{5/2}dr$$
$$\le \| u_{om}\|^2 + \frac{3t}{2\beta}|\tilde{u}_o|^2 \| h\|^2_{L^\infty(0,T)} + \int_0^t \| f(s)\|^2 ds$$
$$+\left[1 + 2(2+1/\beta)(1+\| h\|_{L^\infty(0,T)})\right]\int_0^t \| u_m(s)\|^2 ds$$
$$\le M_T^{(2)} + M_T^{(1)}\int_0^t \| u_m(s)\|^2 ds,$$

trong đó $M_T^{(1)}, M_T^{(2)}$ là các hằng số chỉ phụ thuộc vào T và được chọn như sau:

$$M_T^{(1)} = 1 + 2(2+1/\beta)(1+\| h\|_{L^\infty(0,T)}),$$

$$M_T^{(2)} \ge \| u_{om}\|^2 + \left(\frac{3}{2\beta}|\tilde{u}_o|^2 \| h\|^2_{L^\infty(0,T)}\right)T + \int_0^T \| f(s)\|^2 ds, \forall m.$$

Nhờ bổ đề Gronwall 2.13, từ (3.17) ta được

(3.18) $$\left\| u_m(t) \right\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \left\| u_m(s) \right\|_V^2 ds + 2\int_0^t ds \int_0^1 r \left| u_m(r,s) \right|^{5/2} dr$$

$$\leq M_T^{(2)} \exp(t M_T^{(1)}) \leq M_T \;, \forall m, \forall t,\; 0 \leq t \leq T_m \leq T,$$

nghĩa là $T_m = T$.

b) Đánh giá 2. Nhân (3.9) với $t^2 c_{mj}'(t)$ và tổng theo j, ta có

(3.19) $$2\left\| t u_m'(t) \right\|^2 +$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left\| t u_{mr}(t) \right\|^2 + h(t) t^2 u_m^2(1,t) + \frac{4}{5} t^2 \int_0^1 r \left| u_m(r,t) \right|^{5/2} dr \right]$$

$$= 2t \left\| u_{mr}(t) \right\|^2 + u_m^2(1,t) \frac{d}{dt}[t^2 h(t)]$$

$$+ \frac{8}{5} t \int_0^1 r \left| u_m(r,t) \right|^{5/2} dr + 2\left\langle t f(t), t u_m'(t) \right\rangle$$

$$+ 2\tilde{u}_o \frac{d}{dt}[t^2 h(t) u_m(1,t)] - 2\tilde{u}_o u_m(1,t) \frac{d}{dt}[t^2 h(t)].$$

Tích phân (3.19) theo biến thời gian từ 0 đến t sau đó sắp xếp lại các số hạng ta được

(3.20) $$2\int_0^t \left\| s u_m'(s) \right\|^2 ds + \left\| t u_{mr}(t) \right\|^2 + t^2 u_m^2(1,t)$$

$$+ \frac{4}{5} t^2 \int_0^1 r \left| u_m(r,t) \right|^{5/2} dr$$

$$= [1 - h(t)]\, t^2 u_m^2(1,t) + 2\int_0^t s \left\| u_{mr}(s) \right\|^2 ds + \int_0^t [s^2 h(s)]' u_m^2(1,s)\, ds$$

$$+ \frac{8}{5} \int_0^t s\, ds \int_0^1 r \left| u_m(r,s) \right|^{5/2} dr + 2\int_0^t \left\langle s f(s), s u_m'(s) \right\rangle ds$$

$$+ 2\tilde{u}_o t^2 h(t) u_m(1,t) - 2\tilde{u}_o \int_0^t [s^2 h(s)]' u_m(1,s)\, ds.$$

Dùng bất đẳng thức (2.9), ta có

(3.21) $$\left\| t u_{mr}(t) \right\|^2 + t^2 u_m^2(1,t) \geq \frac{1}{2} \left\| t u_m(t) \right\|_V^2 , \quad \forall t \in [0,T], \forall m.$$

Dùng các bất đẳng thức (2.6), (2.8), (2.9) và với $\beta > 0$ như trong (3.15), ta đánh giá không khó khăn các số hạng ở vế phải của (3.20) như sau

(3.22) $$[1-h(t)]t^2u_m^2(1,t)$$
$$\le (1+\|h\|_{L^\infty(0,T)})\Big[\beta\|tu_{mr}(t)\|^2 + (2+1/\beta)\|tu_m(t)\|^2\Big]$$
$$\le (1+\|h\|_{L^\infty(0,T)})\Big[\beta\|tu_m(t)\|_V^2 + (2+1/\beta)\,t^2M_T\Big],$$

(3.23) $$2\int_0^t s\|u_{mr}(s)\|^2\,ds + \int_0^t [s^2h(s)]'\,u_m^2(1,s)\,ds$$
$$\le \Big[2T + 3\|(t^2h)'\|_{L^\infty(0,T)}\Big]\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2\,ds$$
$$\le 2M_T\Big[2T + 3\|(t^2h)'\|_{L^\infty(0,T)}\Big],$$

(3.24) $$2\left|\tilde{u}_o\int_0^t [s^2h(s)]'\,u_m(1,s)\,ds\right|$$
$$\le 2\sqrt{3}\,|\tilde{u}_o|\,\|(t^2h)'\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^t \|u_m(s)\|_V\,ds$$
$$\le 2|\tilde{u}_o|\,\|(t^2h)'\|_{L^\infty(0,T)}\sqrt{6tM_T}\,,$$

(3.25) $$2\left|\tilde{u}_o t^2h(t)u_m(t)\right| \le \beta\|tu_m(t)\|_V^2 + \frac{3}{\beta}\Big(\tilde{u}_o t\|h\|_{L^\infty(0,T)}\Big)^2,$$

(3.26) $$2\left|\int_0^t \Big\langle s\,f(s), su_m'(s)\Big\rangle ds\right| \le \int_0^t \|sf(s)\|^2\,ds + \int_0^t \|su_m'(s)\|^2\,ds\,.$$

Do đó, từ (3.20) – (3.26) suy ra

(3.27) $$\int_0^t \|su_m'(s)\|^2\,ds + \frac{1}{4}\|tu_m(t)\|_V^2$$
$$\le (1+\|h\|_{L^\infty(0,T)})(2+1/\beta)\,t^2M_T + 2M_T(2T + 3\|(t^2h)'\|_{L^\infty(0,T)})$$
$$+\frac{16}{5}\int_0^t \|su_m(s)\|_V\,ds + \int_0^t \|s\,f(s)\|^2\,ds$$

$$+\frac{3}{\beta}\left(\tilde{u}_o t\|h\|_{L^\infty(0,T)}\right)^2+2\left|\tilde{u}_o\right|\left\|(t^2h)^{/}\right\|_{L^\infty(0,T)}\sqrt{6tM_T}$$

$$\leq M_T^{(3)}+\frac{16}{3}\int_0^t\|su_m(s)\|_V\,ds\leq M_T^{(4)}+\frac{1}{4}\int_0^t\|su_m(s)\|_V^2\,ds,$$

trong đó $M_T^{(3)}, M_T^{(4)}=M_T^{(3)}+\dfrac{256}{9}$ là các hằng số chỉ phụ thuộc T.

Do bổ đề Gronwall, từ (3.27) suy ra

(3.28) $\displaystyle\int_0^t\left\|su_m^{/}(s)\right\|^2ds+\frac{1}{4}\|tu_m(t)\|_V^2\leq M_T^{(4)}e^t\leq M_T^{(4)}e^T=M_T^{(5)}.$

Mặt khác, từ (3.18) ta có đánh giá

(3.29) $\displaystyle\int_0^t ds\int_0^1\left|r^{3/5}F_1(u_m(r,s))\right|^{5/3}dr$

$$=\int_0^t ds\int_0^1 r\left|u_m(r,s)\right|^{5/2}dr\leq\frac{1}{2}M_T\leq M_T\ .$$

Bước 3. *Qua giới hạn*

Do (3.18), (3.28), (3.29) ta suy ra, tồn tại một dãy con của dãy $\{u_m\}$ vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

(3.30) $u_m\to u$ trong $L^\infty(0,T;H)$ yếu $*$,

(3.31) $u_m\to u$ trong $L^2(0,T;V)$ yếu,

(3.32) $tu_m\to tu$ trong $L^\infty(0,T;V)$ yếu $*$,

(3.33) $(tu_m)^{/}\to(tu)^{/}$ trong $L^2(0,T;H)$ yếu,

(3.34) $r^{2/5}u_m\to r^{2/5}u$ trong $L^{5/2}(Q_T)$ yếu.

Dùng bổ đề 2.11 về tính compact của Lions, áp dụng vào (3.32), (3.33) ta có thể trích ra từ dãy $\{u_m\}$ một dãy con vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

(3.35) $tu_m\to tu$ mạnh trong $L^2(0,T;H)$.

Theo định lý Riesz – Fischer, từ (3.35) ta có thể lấy ra từ $\{u_m\}$ một dãy con vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

(3.36) $u_m(r,t) \to u(r,t)$ a.e. (r,t) trong $Q_T = (0,1) \times (0,T)$.

Do $F_1(u) = |u|^{1/2} u$ liên tục, nên

(3.37) $F_1(u_m(r,t)) \to F_1(u(r,t))$ a.e. (r,t) trong Q_T.

Áp dụng bổ đề 2.12, với N = 2, q = 5/3, $G_m = r^{3/5} F_1(u_m) = r^{3/5} |u_m|^{1/2} u_m$, $G = r^{3/5} F_1(u) = r^{3/5} |u|^{1/2} u$.

Từ (3.29), (3.37) suy ra

(3.38) $r^{3/5} |u_m|^{1/2} u_m \to r^{3/5} |u|^{1/2} u$ trong $L^{5/3}(Q_T)$ yếu

Giả sử $\varphi \in C^1([0,T]), \varphi(T) = 0$. Nhân phương trình (3.9) với φ, sau đó tích phân từng phần theo biến t, ta được

$$-\left\langle u_{om}, w_j \right\rangle \varphi(0) - \int_0^T \left\langle u_m(t), w_j \right\rangle \varphi'(t)\,dt + \int_0^T \left\langle u_{mr}(t), w_{jr} \right\rangle \varphi(t)\,dt$$

$$(3.39) \qquad + \int_0^T h(t) u_m(1,t) w_j(1) \varphi(t)\,dt + \int_0^T \left\langle F_1(u_m(t)), w_j \right\rangle \varphi(t)\,dt$$

$$= \int_0^T \left\langle f(t), w_j \right\rangle \varphi(t)\,dt + \tilde{u}_o \int_0^T h(t) w_j(1)\, \varphi(t)\,dt,\ 1 \le j \le m.$$

Để qua giới hạn của số hạng phi tuyến $F_1(u_m(t))$ trong (3.39) ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 3.1. *Ta có*

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^T \left\langle F_1(u_m(t)), w_j \right\rangle \varphi(t)\,dt = \int_0^T \left\langle F_1(u(t)), w_j \right\rangle \varphi(t)\,dt.$$

Chứng minh. Chú ý rằng (3.38) tương đương với

$$(3.40) \qquad \int_0^T dt \int_0^1 r^{3/5} |u_m|^{1/2} u_m \Phi\,dr \to \int_0^T dt \int_0^1 r^{3/5} |u|^{1/2} u \Phi\,dr$$

$$\forall \Phi \in \left(L^{5/3}(Q_T)\right)^{/} = L^{5/2}(Q_T).$$

Mặt khác, ta có

$$(3.41)\quad \int_0^T \left\langle F_1(u_m(t)), w_j \right\rangle \varphi(t)\,dt = \int_0^T\int_0^1 r\left|u_m\right|^{1/2} u_m w_j(r)\varphi(t)\,dr\,dt$$

$$= \int_0^T\int_0^1 \left(r^{3/5}\left|u_m\right|^{1/2} u_m\right)\left(r^{2/5} w_j(r)\varphi(t)\right)dr\,dt.$$

Do (3.40), ta chứng minh $\Phi = r^{2/5} w_j(r)\varphi(t) \in L^{5/2}(Q_T)$.

Thật vậy, do bất đẳng thức (2.7), ta có

$$(3.42)\quad \int_0^T\int_0^1 \left|\Phi\right|^{5/2} dr\,dt = \int_0^T\int_0^1 r\left|w_j(r)\varphi(t)\right|^{5/2} dr\,dt$$

$$= \int_0^1 r^{-1/4}\left|\sqrt{r}\, w_j(r)\right|^{5/2} dr \int_0^T \left|\varphi(t)\right|^{5/2} dt$$

$$\le \left(2\left\| w_j\right\|_V\right)^{5/2} \int_0^1 r^{-1/4} dr \int_0^T \left|\varphi(t)\right|^{5/2} dt$$

$$= \frac{15}{3}\sqrt{2}\left\| w_j\right\|_V^{5/2} \int_0^T \left|\varphi(t)\right|^{5/2} dt < +\infty.$$

Do đó, bổ đề 3.1. được chứng minh.

Cho $m \to +\infty$ trong (3.39), từ (3.11), (3.30), (3.31) và bổ đề 3.1 ta suy ra u thỏa phương trình biến phân

$$-\left\langle u_o, w_j \right\rangle \varphi(0) - \int_0^T \left\langle u(t), w_j \right\rangle \varphi^{/}(t)dt + \int_0^T \left\langle u_r(t), w_{jr} \right\rangle \varphi(t)dt$$

$$(3.43)\quad + \int_0^T h(t)u(1,t)w_j(1)\varphi(t)\,dt + \int_0^T \left\langle F_1(u(t)), w_j \right\rangle \varphi(t)\,dt,$$

$$= \int_0^T \left\langle f(t), w_j \right\rangle \varphi(t)\,dt + \tilde{u}_o \int_0^T h(t) w_j(1)\varphi(t)\,dt\,,$$

$$\forall \varphi \in C^1([0,T])\,, \varphi(T) = 0\,, \forall j = 1,2,...,m.$$

Do đó ta có

$$-\left\langle u_o, v \right\rangle \varphi(0) - \int_0^T \left\langle u(t), v \right\rangle \varphi^{/}(t)dt + \int_0^T \left\langle u_r(t), v_r \right\rangle \varphi(t)\,dt$$

(3.44) $$+\int_0^T h(t)u(1,t)v(1)\varphi(t)dt+\int_0^T\left\langle F_1(u(t)),v\right\rangle\varphi(t)\,dt$$
$$=\int_0^T\left\langle f(t),v\right\rangle\varphi(t)\,dt+\tilde{u}_o\int_0^T h(t)v(1)\varphi(t)\,dt,$$
$$\forall\varphi\in C^1([0,T]),\varphi(T)=0,\forall v\in V.$$

Lấy $\varphi\in D(0,T)$, từ (3.44) suy ra

(3.45) $$\int_0^T[\frac{d}{dt}\left\langle u(t),v\right\rangle]\,\varphi(t)\,dt+\int_0^T\left\langle u_r(t),v_r\right\rangle\varphi(t)dt$$
$$+\int_0^T h(t)u(1,t)v(1)\varphi(t)\,dt+\int_0^T\left\langle F_1(u(t)),v\right\rangle\varphi(t)\,dt$$
$$=\int_0^T\left\langle f(t),v\right\rangle\varphi(t)\,dt+\tilde{u}_o\int_0^T h(t)v(1)\varphi(t)\,dt,\ \forall\varphi\in D(0,T),\forall v\in V.$$

Do đó ta có

(3.46 $$\frac{d}{dt}\left\langle u(t),v\right\rangle+\left\langle u_r(t),v_r\right\rangle+h(t)u(1,t)v(1)+\left\langle F_1(u(t)),v\right\rangle$$
$$=\left\langle f(t),v\right\rangle+\tilde{u}_o h(t)v(1),\quad\forall v\in V$$

đúng trong D(0,T) và do đó hầu hết trong (0,T).

Cho $\varphi\in C^1([0,T]),\ \varphi(T)=0$. Nhân phương trình (3.46) với φ, sau đó tích phân từng phần theo biến thời gian ta được

$$-\left\langle u(0),v\right\rangle\varphi(0)-\int_0^T\left\langle u(t),v\right\rangle\varphi'(t)\,dt+\int_0^T\left\langle u_r(t),v_r\right\rangle\varphi(t)\,dt$$
(3.47) $$+\int_0^T h(t)u(1,t)v(1)\varphi(t)\,dt+\int_0^T\left\langle F_1(u(t)),v\right\rangle\varphi(t)\,dt$$
$$=\int_0^T\left\langle f(t),v\right\rangle\varphi(t)\,dt+\tilde{u}_o\int_0^T h(t)v(1)\varphi(t)\,dt,$$
$$\forall\varphi\in C^1([0,T]),\ \varphi(T)=0,\forall v\in V.$$

So sánh (3.44), (3.47) ta được

(3.48) $$-\left\langle u(0),v\right\rangle\varphi(0)=-\left\langle u_o,v\right\rangle\varphi(0)$$
$$\forall\varphi\in C^1([0,T]),\ \varphi(T)=0,\ \forall v\in V,$$

mà (3.48) tương đương với điều kiện đầu

(3.49) $\quad u(0) = u_o.$

Ta chú ý rằng, từ (3.30) – (3.34), ta có

$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \quad tu \in L^\infty(0,T;V)$ và

$tu' \in L^2(0,T;H), \quad r^{2/5}u \in L^{5/2}(Q_T).$

Vậy sự tồn tại nghiệm được chứng minh.

Bước 4. Tính duy nhất nghiệm

Trước hết, ta cần bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.2. *Giả sử w là nghiệm yếu của bài toán sau*

(3.50) $\quad w_t - (w_{rr} + \frac{1}{r} w_r) = \tilde{f}(r,t),\ 0 < r < 1,\ 0 < t < T,$

(3.51) $\quad \left| \lim_{r \to 0^+} \sqrt{r}\, w_r(r,t) \right| < +\infty,\ w_r(1,t) + h(t) w(1,t) = 0,$

(3.52) $\quad w(r,0) = 0,$

(3.53) $\quad \begin{cases} w \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \\ t\,w \in L^\infty(0,T;V),\ t\,w' \in L^2(0,T;H). \end{cases}$

Khi đó

(3.54) $$\frac{1}{2}\| w(t) \|^2 + \int_0^t \Big[\| w_r(s) \|^2 + h(s) w(1,s) \Big] ds - \int_0^t \left\langle \tilde{f}(s), w(s) \right\rangle ds = 0,\ a.e.\ t \in (0,T).$$

Chú thích. Bổ đề 3.2 là tổng quát hóa của bổ đề trong cuốn sách của Lions [2] cho trường hợp không gian Sobolev có trọng. Chứng minh của bổ đề 3.2 có thể tìm thấy trong [8].

Giả sử u và v là hai nghiệm yếu của bài toán (3.1) – (3.4). Khi đó w = u – v là nghiệm yếu của bài toán (3.50) – (3.52) với vế phải

$\tilde{f}(r,t) = -\left|u(t)\right|^{1/2} u(t) + \left|v(t)\right|^{1/2} v(t)$. Dùng bổ đề 3.2, ta có đẳng thức sau

$$(3.55) \qquad \frac{1}{2}\| w(t) \|^2 + \int_0^t [\| w_r(s) \|^2 + h(s)\, w^2(1,s)]\, ds$$
$$= -\int_0^t \left\langle \left|u(s)\right|^{1/2} u(s) - \left|v(s)\right|^{1/2} v(s), w(s) \right\rangle ds \le 0,$$

do tính chất đơn điệu tăng của $\left|u\right|^{1/2} u$. Từ (3.55) ta suy ra rằng w = 0. Tính duy nhất được chứng minh.

Vậy định lý (3.1) được chứng minh xong.

CHƯƠNG 4

NGHIỆM T – TUẦN HOÀN CỦA BÀI TOÁN PHI TUYẾN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu nghiệm T – tuần hoàn của bài toán giá trị biên phi tuyến như sau:

(4.1) $u_t - (u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + F_\varepsilon(u) = f(r,t), 0 < r < 1, 0 < t < T,$

(4.2) $\left|\lim\limits_{r\to 0^+} \sqrt{r}\, u_r(r,t)\right| < +\infty,\ u_r(1,t) + h(t)(u(1,t) - \tilde{u}_o) = 0,$

(4.3) $u(r,0) = u(r,T),$

(4.4) $F_\varepsilon(u) = \varepsilon|u|^{1/2}u,$

trong đó $\tilde{u}_o$ là hằng số cho trước, $h(t), f(r,t)$ là hàm số cho trước T – tuần hoàn theo t, thỏa các giả thiết sau:

(H_2) $\tilde{u}_o \in R,$

$(H_3^/)$ $h \in W^{1,\infty}(0,T),\ h(0) = h(T),\ h(t) \geq h_o > 0,$

$(H_4^/)$ $f \in C^0(0,T;H),\ f(r,0) = f(r,T).$

Không làm mất tính tổng quát của bài toán ta lấy $\varepsilon = 1$

Nghiệm yếu của bài toán (4.1) – (4.4) được thiết lập từ bài toán biến phân sau:

Tìm $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ sao cho $u^/ \in L^2(0,T;H)$ và $u(t)$ thỏa phương trình biến phân sau:

(4.5) $$\int_0^T \langle u^/(t), v(t)\rangle dt + \int_0^T [\langle u_r(t), v_r(t)\rangle + h(t)u(1,t)v(1,t)]dt$$
$$+ \int_0^T \langle F_1(u(t)), v(t)\rangle dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle dt + \tilde{u}_o \int_0^T h(t)v(1,t)\,dt,$$
$$\forall v \in L^2(0,T;V),$$

và điều kiện T – tuần hoàn

(4.6) $\quad u(0) = u(T)$.

Khi đó, ta có định lý sau

Định lý 4.1. *Cho* $T > 0$ và $(H_1),(H_3^/),(H_4^/)$ *đúng. Khi đó, bài toán* (4.1) – (4.4) *có duy nhất một nghiệm yếu* T – *tuần hoàn* $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ sao cho $u^/ \in L^2(0,T;H)$, $r^{2/5}u \in L^{5/2}(Q_T)$.

Chứng minh. Gồm nhiều bước.

Bước 1. *Phương pháp Galerkin*.

Lấy một cơ sở trực chuẩn $\{w_j\}$, $j = 1,2,...$ trong không gian Hilbert tách được V. Ta tìm $u_m(t)$ theo dạng

(4.7) $$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{m\,j}(t) w_j,$$

trong đó $c_{m\,j}(t)$ thỏa hệ phương trình vi phân phi tuyến

(4.8) $$\begin{aligned}&\left\langle u_m^/(t), w_j \right\rangle + \left\langle u_{m\,r}(t), w_{j\,r} \right\rangle + h(t) u_m(1,t) w_j(1)\\&+ \left\langle F_1(u_m(t)), w_j \right\rangle\\&= \left\langle f(t), w_j \right\rangle + \tilde{u}_o h(t) w_j(1),\, 1 \le j \le m,\end{aligned}$$

và điều kiện T – tuần hoàn

(4.9) $\quad u_m(0) = u_m(T)$.

Đầu tiên, ta xét hệ phương trình (4.8) và điều kiện đầu

($4.9^/$) $\quad u_m(0) = u_{om}$,

trong đó u_{om} thuộc không gian sinh bởi các hàm $\{w_j\}$, $j = 1,2,...,m$.

Khi đó, ta được một hệ m phương trình vi phân thường phi tuyến với các ẩn hàm $c_{m\,j}(t)$, $j = 1,2,...,m$, và các điều kiện đầu ($4.9^/$).

Dễ thấy rằng tồn tại $u_m(t)$ có dạng (4.7) thỏa (4.8) và ($4.9^/$) với hầu khắp nơi trên $0 \le t \le T_m$, với một $T_m \in (0,T]$. Các đánh giá tiên nghiệm sau đây cho phép ta lấy $T_m = T$ với mọi m.

Bước 2. *Đánh giá tiên nghiệm.*

Nhân phương trình thứ j của hệ (4.8) với $c_{mj}(t)$, sau đó lấy tổng theo j , ta được

(4.10) $$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\left\|u_{mr}(t)\right\|^2 + 2h(t)u_m^2(1,t) + 2\int_0^1 r\left|u_m(r,t)\right|^{5/2}dr = 2\left\langle f(t),u_m(t)\right\rangle + 2\tilde{u}_o h(t)u_m(t).$$

Từ giả thiết $(H_3^/)$ và bất đẳng thức (2.9), suy ra

(4.11) $$2\left\|u_{mr}(t)\right\|^2 + 2h(t)u_m^2(1,t) \ge C_1\|u_m(t)\|_V^2$$

trong đó $C_1 = \min\{1,h_o\}$.

Do đó, từ (4.10), (4.11) suy ra

(4.12) $$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + C_1\|u_m(t)\|_V^2 + 2\int_0^1 r\left|u_m(r,t)\right|^{5/2}dr\\ &\le 2\left\langle f(t),u_m(t)\right\rangle + 2\tilde{u}_o h(t)u_m(1,t)\\ &\le \frac{1}{\delta}\|f(t)\|^2 + \delta\|u_m(t)\|^2 + \frac{3}{\delta}\left|\tilde{u}_o\right|^2\|h\|_{L^\infty(0,T)}^2 + \delta\|u_m(t)\|_V^2\\ &\le \frac{1}{\delta}\|f(t)\|^2 + \frac{3}{\delta}\left|\tilde{u}_o\right|^2\|h\|_{L^\infty(0,T)}^2 + 2\delta\|u_m(t)\|_V^2\end{aligned}$$

với mọi $\delta > 0$.

Chọn $\delta > 0$ sao cho

(4.13) $$C_1 - 2\delta = C_2 > 0.$$

Do đó, từ (4.12), (4.13) ta thu được

(4.14) $$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + C_2\|u_m(t)\|^2$$

$$\leq \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + C_2\|u_m(t)\|_V^2 + 2\int_0^1 r|u_m(r,t)|^{5/2}dr$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\|f(t)\|^2 + \frac{3}{\delta}|\tilde{u}_o|^2\|h\|_{L^\infty(0,T)}^2 = \tilde{h}_1(t).$$

Nhân bất đẳng thức (4.14) với $e^{C_2 t}$ và sau đó tích phân ta có

(4.15) $\quad \|u_m(t)\|^2 \leq \|u_{om}\|^2 e^{-C_2 t} + e^{-C_2 t}\int_0^t \tilde{h}_1(s)e^{C_2 s}ds.$

Cho $T > 0$, ta xét hàm số sau

(4.16) $\quad \tilde{R}(t) = \begin{cases} (e^{C_2 t} - 1)^{-1}\int_0^t \tilde{h}_1(s)e^{C_2 s}ds, & 0 < t \leq T, \\ \tilde{h}_1(0)/C_2, & t = 0. \end{cases}$

Khi đó $\tilde{R} \in C^0[0,T]$ và ta đặt $R = \max_{0\leq t\leq T}\sqrt{\tilde{R}(t)}.$

Nếu $\|u_{om}\| \leq R$ từ (4.15), (4.16) cho ta

(4.17) $\quad \|u_m(t)\| \leq R$ nghĩa là $T_m = T$ với mọi m.

Gọi $\overline{B_m}(0,R)$ là quả cầu đóng tâm O, bán kính R trong không gian m chiều sinh bởi các hàm $w_j, j = 1,2,...,m,$ đối với chuẩn $\|.\|$

Xét ánh xạ : $F_m : \overline{B_m}(0,R) \to \overline{B_m}(0,R)$ cho bởi công thức

(4.18) $\quad F_m(u_{om}) = u_m(T).$

Ta chứng minh rằng F_m là ánh xạ co.

Giả sử $u_{om}, v_{om} \in \overline{B_m}(0,R)$ và đặt $\Phi_m(t) = u_m(t) - v_m(t)$, trong đó $u_m(t), v_m(t)$ là các nghiệm của hệ (4.8) trên [0,T] thỏa các điều kiện đầu $u_m(0) = u_{om}$ và $v_m(0) = v_{om}$ lần lượt. Khi đó, $\Phi_m(t)$ thỏa hệ phương trình vi phân sau đây

(4.19) $\quad \left\langle \Phi_m^{/}(t), w_j \right\rangle + \left\langle \Phi_{mr}(t), w_{jr} \right\rangle + h(t)\Phi_m(1,t)w_j(1)$

$$= -\left\langle |u_m(t)|^{1/2}u_m(t) - |v_m(t)|^{1/2}v_m(t), w_j \right\rangle, 1 \leq j \leq m$$

và điều kiện đầu

(4.20) $\quad \Phi_m(0) = u_{om} - v_{om}$.

Tính toán tương tự như chương 3, ta được

(4.21) $$\frac{d}{dt}\left\| \Phi_m(t) \right\|^2 + 2\left\| \Phi_{mr}(t) \right\|^2 + 2h(t)\left| \Phi_m(1,t) \right|^2$$
$$= -2\left\langle \left| u_m(t) \right|^{1/2} u_m(t) - \left| v_m(t) \right|^{1/2} v_m(t), u_m(t) - v_m(t) \right\rangle \le 0 .$$

Do (4.11), từ (4.21) suy ra

(4.22) $$\frac{d}{dt}\left\| \Phi_m(t) \right\|^2 + C_1\left\| \Phi_{mr}(t) \right\|_V^2 \le 0 .$$

Tích phân bất đẳng thức (4.22), ta được

(4.23) $$\left\| u_m(T) - v_m(T) \right\| \le e^{-\frac{1}{2}TC_1} \left\| u_{om} - v_{om} \right\|$$

nghĩa là $F_m : \overline{B_m}(0,R) \to \overline{B_m}(0,R)$ là ánh xạ co

Do đó tồn tại duy nhất $u_{om} \in \overline{B_m}(0,R)$ sao cho

$$u_{om} = F_m(u_{om}) = u_m(T).$$

Do đó, với mỗi m tồn tại một hàm $u_{om} \in \overline{B_m}(0,R)$ sao cho nghiệm của bài toán giá trị ban đầu (4.8), ($4.9^/$) là một nghiệm T – tuần hoàn của hệ (4.8). Nghiệm này cũng thỏa bất đẳng thức (4.17) với hầu hết $t \in [0,T]$ và nhờ (4.14) ta suy ra

(4.24) $$\left\| u_m(t) \right\|^2 + C_2\int_0^t \left\| u_m(s) \right\|_V^2 ds + 2\int_0^t ds \int_0^1 r\left| u_m(r,s) \right|^{5/2} dr \le C_3 ,$$

trong đó C_3 là hằng số độc lập với m.

Nhân phương trình thứ j của hệ (4.8) với $c_{mj}^/(t)$, lấy tổng theo j và sau đó tích phân từng phần theo biến t từ 0 đến T, ta có

(4.25) $$\int_0^T \left\| u_m^/(t) \right\|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\left\| u_{mr}(t) \right\|^2 dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T h(t)\frac{d}{dt}[u_m^2(1,t)]dt+\int_0^T\left\langle\left|u_m(t)\right|^{1/2}u_m(t),u_m^{/}(t)\right\rangle dt$$
$$=\int_0^T\left\langle f(t),u_m^{/}(t)\right\rangle dt+\tilde{u}_o\int_0^T h(t)u_m^{/}(1,t)\,dt.$$

Từ (4.9) ta thấy rằng hai bất đẳng thức sau đây đúng:

i / $\displaystyle\int_0^T\frac{d}{dt}\left\|u_{mr}(t)\right\|^2dt=0,$

ii / $\displaystyle\int_0^T\left\langle\left|u_m(t)\right|^{1/2}u_m(t),u_m^{/}(t)\right\rangle dt=\frac{2}{5}\int_0^1 r\,dr\int_0^T\left(\frac{d}{dt}\left|u_m(r,t)\right|^{5/2}\right)dt$

$$=\frac{2}{5}\int_0^1 r\left(\left|u_m(r,T)\right|^{5/2}-\left|u_m(r,0)\right|^{5/2}\right)dr=0.$$

Do đó, đẳng thức (4.25), nhờ tích phân từng phần ta thu được

(4.26) $$\int_0^T\left\|u_m^{/}(t)\right\|^2dt=\int_0^T\left\langle f(t),u_m^{/}(t)\right\rangle dt+\frac{1}{2}\int_0^T h^{/}(t)u_m^2(1,t)\,dt$$
$$-\tilde{u}_o\int_0^T h^{/}(t)u_m(1,t)\,dt.$$

Sau cùng, nhờ (4.24), (4.26), suy ra bất đẳng thức sau

(4.27) $$2\int_0^T\left\|u_m^{/}(t)\right\|^2dt\le\int_0^T\left\|f(t)\right\|^2dt+\int\left\|u_m^{/}(t)\right\|^2dt$$
$$+\left\|h^{/}\right\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^T u_m^2(1,t)\,dt+2\left|\tilde{u}_o\right|\left\|h^{/}\right\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^T\left|u_m(1,t)\right|dt$$
$$\le\int_0^T\left\|u_m^{/}(t)\right\|^2dt+\int_0^T\left\|f(t)\right\|^2dt+3\left\|h^{/}\right\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^T\left\|u_m(t)\right\|_V^2dt$$
$$+2\sqrt{3}\left|\tilde{u}_o\right|\left\|h^{/}\right\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^T\left\|u_m(t)\right\|_V dt$$
$$\le\int_0^T\left\|u_m^{/}(t)\right\|^2dt+\int_0^T\left\|f(t)\right\|^2dt+3\left\|h^{/}\right\|_{L^\infty(0,T)}\int_0^T\left\|u_m(t)\right\|_V^2dt$$

$$+2\sqrt{3T}\,|\tilde{u}_o|\left\|h^/\right\|_{L^\infty(0,T)}\left(\int_0^T \|u_m(t)\|_V^2\,dt\right)^{1/2}$$

$$\leq \int_0^T \left\|u_m^/(t)\right\|^2 dt + C_4,$$

trong đó C_4 là hằng số độc lập với m.

(4.28) $\displaystyle\int_0^T \left\|u_m^/(t)\right\|^2 dt \leq C_4$ với mọi m.

Mặt khác, từ (4.24), ta có đánh giá

(4.29) $$\int_0^t ds \int_0^1 \left| r^{3/5}\,|u_m(r,s)|^{1/2}\,u_m(r,s)\right|^{5/3} dr$$

$$= \int_0^t ds \int_0^1 r\,|u_m(r,s)|^{5/2}\,dr \leq \frac{1}{2}C_3 .$$

Bước 3. *Qua giới hạn.*

Do (4.24), (4.28), (4.29) ta suy ra, tồn tại một dãy con của dãy $\{u_m\}$, vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

(4.30) $u_m \to u$ trong $L^\infty(0,T;H)$ yếu $*$,

(4.31) $u_m \to u$ trong $L^2(0,T;V)$ yếu,

(4.32) $u_m^/ \to u^/$ trong $L^2(0,T;H)$ yếu,

(4.33) $r^{2/5}u_m \to r^{2/5}u$ *trong* $L^{5/2}(Q_T)$.

Trước hết ta nghiệm rằng

(4.34) $\quad u(0) = u(T)$.

Với mọi $v \in H$, từ (4.9) ta có

(4.35) $$\int_0^T \left\langle u_m^/(t), v\right\rangle dt = \langle u_m(t) - u_m(0), v\rangle = 0$$

Từ (4.32), (4.35) suy ra

(4.36) $\int_0^T \left\langle u_m^/(t), v \right\rangle dt \to \int_0^T \left\langle u^/(t), v \right\rangle dt = 0 \;\; khi\; m \to +\infty$

Tính toán tương tự như (4.35) ta có

(4.37) $\left\langle u(T) - u(0), v \right\rangle = \int_0^T \left\langle u^/(t), v \right\rangle dt = 0$ với mọi $v \in H$, và

do đó (4.34) đúng.

Dùng bổ đề 2.11. về tính compact của Lions, áp dụng vào (4.31), (4.32) ta có thể lấy ra từ dãy $\{u_m\}$ một dãy con vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

(4.38) $u_m \to u$ mạnh trong $L^2(0,T;H)$

Do định lý Riesz – Fischer, từ (4.38) ta có thể lấy ra từ $\{u_m\}$ một dãy con vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

(4.39) $u_m(r,t) \to u(r,t)$ a.e (r,t) trong $Q_T = (0,1) \times (0,T)$.

Do $u \mapsto |u|^{1/2} u$ liên tục nên

(4.40) $r^{3/5} |u_m(r,t)|^{1/2} u_m(r,t) \to r^{3/5} |u(r,t)|^{1/2} u(r,t)$

với $a.e. (r,t)$ trong Q_T.

Áp dụng bổ đề 2.12, với

$$N = 2, q = 5/3, G_m = r^{3/5} |u_m|^{1/2} u_m, G = r^{3/5} |u|^{1/2} u .$$

Từ (4.29), (4.41) suy ra

(4.41) $r^{3/5} |u_m|^{1/2} u_m \to r^{3/5} |u|^{1/2} u$ trong $L^{5/3}(Q_T)$ yếu

Ký hiệu $g_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{i\pi t}{T}\right), i = 1,2,...$ là một cơ sở trực chuẩn trong không gian Hilbert thực $L^2(0,T)$. Khi đó tập $\{g_i w_j; i, j = 1,2,...\}$ lập thành một cơ sở trực chuẩn trong không gian $L^2(0,T;V)$.

Nhân phương trình thứ i của (4.8) với $g_i(t)$ sau đó lấy tích phân theo t, $0 \le t \le T$, ta có

$$\begin{aligned}
(4.42) \quad & \int_0^T \left\langle u_m^{/}(t), w_j \right\rangle g_i(t)\,dt + \int_0^T \left\langle u_{m\,r}(t), w_{j\,r} \right\rangle g_i(t)\,dt \\
& + \int_0^T h(t) u_m(1,t) w_j(1) g_i(t)\,dt + \int_0^T \left\langle \left| u_m(t) \right|^{1/2} u_m(t), w_j \right\rangle g_i(t)\,dt \\
& = \int_0^T \left\langle f(t), w_j \right\rangle g_i(t)\,dt + \int_0^T \tilde{u}_o h(t) w_j(1) g_i(t)\,dt \\
& \forall j = 1,2,...,m, \forall i \in N.
\end{aligned}$$

Để qua giới hạn của số hạng phi tuyến $\left| u_m(t) \right|^{1/2} u_m(t)$ trong (4.42) ta dùng bổ đề sau

Bổ đề 4.1. $\forall i, j = 1,2,...$ ta có

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^T \langle |u_m(t)|^{1/2} u_m(t), w_j \rangle g_i(t)dt = \int_0^T \langle |u(t)|^{1/2} u(t), w_j \rangle g_i(t)dt.$$

Chứng minh. Chú ý rằng (4.41) tương đương với

$$\begin{aligned}
(4.43) \quad & \int_0^T dt \int_0^1 r^{3/5} \left| u_m \right|^{1/2} u_m \Phi\, dr \to \int_0^T dt \int_0^1 r^{3/5} \left| u \right|^{1/2} u \Phi\, dr \\
& \forall \Phi \in \left(L^{5/3}(Q_T) \right)^{/} = L^{5/2}(Q_T).
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\int_0^T \left\langle \left| u_m(t) \right|^{1/2} u_m(t), w_j \right\rangle g_i(t)\,dt = \int_0^T \int_0^1 r \left| u_m \right|^{1/2} u_m\, w_j(r) g_i(t)\,dr\,dt$$

$$(4.44)\qquad = \int_0^T\int_0^1 \left(r^{3/5}\left|u_m\right|^{1/2} u_m\right)\left(r^{2/5} w_j(r)\, g_i(t)\right) dr\, dt\,.$$

Do (4.44), bổ đề 4.1. sẽ được chứng minh nếu ta khẳng định được rằng $\Phi = r^{2/5} w_j(r) g_i(t) \in L^{5/2}(Q_T)$. Thật vậy, do bất đẳng thức (2.7), ta có

$$\int_0^T\int_0^1 \left|\Phi\right|^{5/2} dr\, dt = \int_0^T\int_0^1 r\left|w_j(r) g_i(t)\right|^{5/2} dr\, dt$$

$$= \int_0^1 r^{-1/4}\left|\sqrt{r}\, w_j(r)\right|^{5/2} dr \int_0^T \left|g_i(t)\right|^{5/2} dt$$

$$(4.45)\qquad \le \left(2\left\|w_j\right\|_V\right)^{5/2} \int_0^1 r^{-1/4} dr \int_0^T \left|g_i(t)\right|^{5/2} dt$$

$$= \frac{15}{3}\sqrt{2}\left\|w_j\right\|_V^{5/2} \int_0^T \left|g_i(t)\right|^{5/2} dt < +\infty\,.$$

Vậy bổ đề 4.1 được chứng minh.

Cho $m \to +\infty$ trong (4.42), từ (4.30) – (4.32) và bổ đề 4.1, ta suy ra u thỏa phương trình biến phân

$$(4.46)\qquad \int_0^T \left\langle u'(t), w_j\right\rangle g_i(t)\, dt + \int_0^T \left\langle u_r(t), w_{jr}\right\rangle g_i(t)\, dt$$

$$+ \int_0^T h(t) u(1,t)\, w_j(1)\, g_i(t)\, dt + \int_0^T \left\langle \left|u(t)\right|^{1/2} u(t), w_j\right\rangle g_i(t)\, dt$$

$$= \int_0^T \left\langle f(t), w_j\right\rangle g_i(t)\, dt + \tilde{u}_o \int_0^T h(t)\, w_j(1)\, g_i(t)\, dt,\ \forall i, j \in N\,.$$

Từ (4.46) suy ra phương trình sau đây đúng.

$$(4.47)\qquad \int_0^T \left\langle u'(t), v(t)\right\rangle dt + \int_0^T \left\langle u_r(t), v_r(t)\right\rangle dt + \int_0^T h(t) u(1,t) v(1,t)\, dt$$

$$+ \int_0^T \left\langle \left|u(t)\right|^{1/2} u(t), v(t)\right\rangle dt = \int_0^T \left\langle f(t), v(t)\right\rangle dt + \tilde{u}_o \int_0^T h(t) v(1,t)\, dt$$

$\forall v \in L^2(0,T;V)$.

Vậy sự tồn tại nghiệm được chứng minh.

Bước 4. *Tính duy nhất nghiệm.*

Giả sử u, v là hai nghiệm yếu của (4.1) – (4.4). Khi đó $w = u - v$ thỏa bài toán biến phân sau đây

(4.48) $$\int_0^T \left\langle w'(t), \varphi(t) \right\rangle dt + \int_0^T \left\langle w_r(t), \varphi_r(t) \right\rangle dt + \int_0^T h(t)\, w(1,t)\, \varphi(1,t)\, dt$$
$$+ \int_0^T \left\langle \left| u(t) \right|^{1/2} u(t) - \left| v(t) \right|^{1/2} v(t), \varphi(t) \right\rangle dt = 0, \forall \varphi \in L^2(0,T;V),$$

(4.49) $w(0) = w(T)$,

với $u, v \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, $u', v' \in L^2(0,T;H)$,

$r^{2/5}u,\, r^{2/5}v \in L^{5/2}(Q_T)$.

Lấy $\varphi = w$ trong (4.48) và chú ý rằng $\int_0^T \left\langle w'(t), w(t) \right\rangle dt = 0.$

Khi đó sử dụng (4.11) và (4.49) ta được

(4.50) $$\frac{1}{2} C_1 \| w \|^2_{L^2(0,T;V)} \le \int_0^T \| w_r(t) \|^2 dt + \int_0^T h(t)\, w^2(1,t)\, dt$$
$$= -\int_0^T \left\langle \left| u(t) \right|^{1/2} u(t) - \left| v(t) \right|^{1/2} v(t), u(t) - v(t) \right\rangle dt \le 0.$$

Điều này dẫn đến $w = 0$ nghĩa là $u = v$.

Định lý 4.1 được chứng minh hoàn toàn.

PHẦN KẾT LUẬN

Qua luận văn này, tác giả đã học tập được các công cụ và các phương pháp khác nhau để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của một số phương trình nhiệt phi tuyến trong một hình trụ với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất.

(1) $u_t - (u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + \varepsilon|u|^{1/2}u = f(r,t),\ 0 < r < 1, 0 < t < T,$

(2) $\left|\lim_{r \to 0^+} \sqrt{r}\, u_r(r,t)\right| < +\infty,\ u_r(1,t) + h(t)(u(1,t) - \tilde{u}_o) = 0,$

(3) $u(r,0) = u_o(r)$, hoặc

(4) $u(r,0) = u(r,T),$

trong đó $\tilde{u}_o, \varepsilon > 0$ là các hằng số cho trước, $h(t), f(r,t)$ là các hàm số cho trước thỏa một số điều kiện nào đó ta sẽ chỉ rõ sau đó.

Sau phần trình bày các không gian Sobolev có trọng và một số công cụ liên quan thì phần chính của luận văn nằm ở các chương 3 và 4.

Trong chương 3, chúng tôi trình bày chứng minh bài toán phi tuyến với điều kiện đầu (1), (2), (3) có nghiệm yếu duy nhất trong các không gian Sobolev có trọng thích hợp bằng phương pháp Galerkin.

Trong chương 4, chúng tôi trình bày chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu T – tuần hoàn của bài toán phi tuyến (1), (2), (4), trong đó bài toán xấp xỉ hữu hạn chiều tìm nghiệm T – tuần hoàn được thực hiện nhờ bài toán điều kiện đầu thông qua định lý ánh xạ co.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R.A. *Adams*, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] *J.L.Lions*, Quelques méthodes de résolution des problems aux limites nonlinéaires, *Dunod- Gauthier - Villars*, Paris 1969.

[3] *D. Lauerova*, The existence of a periodic solution of a parabolic equation with the Bessel operator, *Aplikace Matematiky*, **29** (1), (1984), 40- 44.

[4] *Nguyễn Thành Long*, *Alain Phạm Ngọc Định*, Periodic solutions of a nonlinear parabolic equation involving Bessel' s operator, *Computers Math. Applic.* **25** (1993), 11- 18.

[5] *Nguyễn Thành Long*, *Bùi Tiến Dũng*, *Trần Minh Thuyết*, On a linear boundary value problem for a nonlinear ordinary differential operator in weighted Sobolev spaces, *Z. Anal. Anw*, **19** (2000), No. 4, 1035- 1046.

[6] *R.S. Minasjan*, On one problem of the periodic heat flow in the infinite cylinder, *Dokl. Akad. Nauk. Arm.* SSR. **48**, (1969).

[7]*Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Thành Long*, On a nonlinear boundary value problem with a mixed nonhomogeneous condition, *Vietnam J. Math.*, **26** (1998), 301 – 309.

[8] *Nguyễn thị Xuân Anh*, Khảo sát một số phương trình parabolic phi tuyến, *Luận văn Thạc sỹ Toán học*, *Đại học Sư Phạm Tp. HCM*, tháng12/ 1997, 45 trang.