

MỤC LỤC

Mục lục-----	1
Danh mục các hình vẽ và đồ thị -----	3
Danh mục các bảng-----	4
Danh mục các chữ viết tắt -----	5
MỞ ĐẦU -----	6
CHƯƠNG 1. Tổng quan tình hình nghiên cứu ^{12}C -----	9
1.1. Sơ lược về sự hình thành ^{12}C -----	9
1.1.1. Giả thiết của Salpeter và Opick-----	10
1.1.2. Vận dụng phương pháp CDCC để giải bài toán 3 alpha -----	11
1.2 Các thí nghiệm đo ^{12}C -----	12
1.2.1. Thí nghiệm xác định trạng thái kích thích thứ nhất của ^{12}C (4,44 MeV)--	13
1.2.2. Thí nghiệm của Han O. U. Fynbo, Christian Aa. Diget, Uffe C. Bergmann -----	13
CHƯƠNG 2. Cơ sở lý thuyết tính tốc độ phản ứng-----	17
2.1. Cơ sở lý thuyết -----	17
2.2. Phân bố Maxwell – Boltzmann -----	18
2.3. Phản ứng không cộng hưởng các hạt mang điện -----	20
2.4. Phản ứng qua kênh cộng hưởng hẹp – riêng biệt-----	26
CHƯƠNG 3. Các phương pháp tính tốc độ phản ứng 3 alpha -----	30
3.1. Áp dụng phương pháp CDCC để giải bài toán ba alpha -----	30
3.2. Giải lại bài toán phản ứng ba alpha theo Fowler -----	34
3.3. Lời giải số cho tốc độ phản ứng ba alpha -----	36
3.3.1. Tốc độ phản ứng cộng hưởng -----	36
3.3.2. Tốc độ phản ứng không cộng hưởng -----	37
3.3.3. Tốc độ phản ứng toàn phần -----	40
CHƯƠNG 4. Tốc độ phản ứng cho phân bố Levy -----	46
4.1. Hiệu chỉnh phân bố Maxwell – Boltzmann -----	46

4.2. Tốc độ phản ứng cho phân bố Levy-----	47
4.2.1. Tốc độ phản ứng cộng hưởng cho phân bố Levy-----	48
4.2.2. Tốc độ phản ứng không cộng hưởng cho phân bố Levy -----	48
4.2.3. Tốc độ phản ứng toàn phần cho phân bố Levy -----	51
4.3. Kết quả bài toán – Thảo luận-----	52
Tài liệu tham khảo-----	55
Phụ lục -----	57

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ VÀ ĐỒ THỊ.

Hình 1.1 Chu trình CN và chu trình kép CNO	9
Hình 1.2 Quá trình hình thành ^{12}C	10
Hình 1.3 Hệ ba alpha.....	12
Hình 1.4 Đo cộng hưởng ^{12}C từ phân rã β của ^{12}B và ^{12}N	14
Hình 1.5 Tốc độ thực nghiệm so với NACRE.....	15
Hình 2.1 Phân bố Maxwell – Boltzmann theo năng lượng	19
Hình 2.2 Thế xuyên rào Coulomb của một hạt mang điện.....	21
Hình 2.3 Đỉnh Gamow nơi phản ứng xảy ra lớn nhất.....	23
Hình 2.4 Hàm Gauss và phép tính gần đúng	25
Hình 2.4 Cộng hưởng hẹp.....	28
Hình 3.1 Hình vẽ mô tả hệ ba alpha.....	30
Hình 3.2 Rào thế Coulomb trong tương tác ba hạt	33

DANH MỤC CÁC BẢNG.

Bảng 1.1 Các tính chất của mức cộng hưởng ^{12}C	15
Bảng 3.1 Tốc độ phản ứng ba alpha bằng phương pháp CDCC	34
Bảng 3.2 Tốc độ phản ứng toàn phần được tái tính lại theo Fowler	41
Bảng 3.3 Tốc độ phản ứng toàn phần lấy từ NACRE	43

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

CDCC:	Continuum discretized couplped channels
CD:	Continuum discretized
CC:	Coupled channels
Av:	Average
Mid:	Midpoint
PS:	Pseudo – state

MỞ ĐẦU

Cuộc sống hằng ngày của chúng ta và các sinh vật trên Trái Đất được sưởi ấm nhờ ngôi sao gần nhất là Mặt Trời. Năng lượng của các tia sáng Mặt Trời được sinh ra từ những phản ứng nhiệt hạch của hydro trong lòng Mặt Trời. Giả thuyết này đã được Eddington đưa ra vào năm 1920 và sau đó Hans Bethe đã phát triển và đưa ra những quá trình nhiệt hạch chi tiết vào năm 1939 [13].

Tất cả sự sống trên Trái Đất, kể cả chúng ta phụ thuộc vào ánh sáng Mặt Trời và vì vậy phụ thuộc vào các quá trình hạt nhân xảy ra trong lòng Mặt Trời. Nhưng Mặt Trời lại không là nguồn sinh ra các nguyên tố hóa học trên Trái Đất chúng ta như Cacbon, Natri ... và các nguyên tố nặng hơn nữa. Hai nguyên tố đầu tiên trong bảng tuần hoàn hóa học là hydro và heli đã xuất hiện từ một vài phút đầu tiên sau Big Bang trong điều kiện nhiệt độ và mật độ rất cao trong pha giãn nở của vũ trụ, và sau đó một lượng nhỏ Liti cũng đã được sinh ra. Tuy nhiên những nguyên tố nặng hơn thì vẫn chưa được sinh ra.

Vậy đâu là nguồn gốc của những nguyên tố nặng trên Trái Đất? Câu trả lời chung và được chấp nhận đó là tất cả những nguyên tố nặng từ Cacbon cho tới những nguyên tố phóng xạ như Urani được sinh ra bởi các quá trình hạt nhân trong lòng những ngôi sao của các thiên hà. Những ngôi sao tổng hợp nên những nguyên tố nặng, tiến hóa và cuối cùng phóng ra những tro tàn của chúng vào trong không gian giữa các vì sao trước khi hệ Mặt Trời của chúng ta được hình thành từ bốn đến năm tỉ năm về trước.

Sau Big Bang, tất cả các nguyên tố đều được hình thành trong vũ trụ, trong đó ^{12}C là một trong những nguyên tố quan trọng nhất vì nó là nguồn gốc của sự sống. Việc đi tìm nguồn gốc của ^{12}C sẽ giúp ta trả lời được câu hỏi “*chúng ta đến từ đâu*”. Trong các nghiên cứu trước đây, đã có nhiều các nhà khoa học nghiên cứu về các phản ứng hình thành ^{12}C mà điển hình là tiên đoán của Hoyle vào năm 1953 về sự tồn tại của trạng thái 0^+ của ^{12}C năng lượng 7,65 MeV trên trạng thái cơ bản để giải thích cho độ giàu của nguyên tố ^{12}C , các tính toán của Fowler [4] cho phản ứng

3 alpha qua hai phản ứng ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$ và ${}^8\text{Be} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}^* (\rightarrow {}^{12}\text{C})$, phương pháp giải phương trình Schrodinger cho tương tác trực tiếp của ba hạt alpha [9] ... Tuy nhiên trong một vài nghiên cứu lại cho kết quả khác nhau.

Trong nghiên cứu phổ thông lượng neutrino của Mặt Trời, chúng tôi nhận thấy rằng, ở vùng năng lượng 16 đến 20 MeV có sự chênh lệch giữa lý thuyết và thực nghiệm. Tuy nhiên, thực nghiệm đo được từ phòng thí nghiệm tại Kamiokande, SNO... lại cho kết quả thông lượng neutrino tại vùng này là tương đối lớn, tôi và Nguyễn Hoàng Phúc đã khai thác được sự khác nhau giữa số liệu lý thuyết và thực nghiệm thông lượng neutrino từ Mặt Trời. Từ đó chúng tôi nhận thấy rằng cần phải hiệu chỉnh phân bố Maxwell – Boltzmann bằng cách cộng thêm phân bố Lévy. Như vậy, nếu giả thiết của chúng tôi đưa ra là hợp lí thì tốc độ phản ứng của một số phản ứng hạt nhân xảy ra trong lòng Mặt Trời và các sao sẽ thay đổi. Mục đích của luận văn này vì vậy sẽ là việc khảo sát giá trị tốc độ phản ứng ba alpha với phân bố mới Maxwell – Boltzmann + Lévy.

Với mục đích như trên, luận văn này sẽ trình bày trong bốn chương:

Chương 1: Giới thiệu tổng quan về tình hình nghiên cứu ${}^{12}\text{C}$.

Chương 2: Giới thiệu cơ sở lý thuyết, với các vấn đề liên quan như tốc độ phản ứng, hàm phân bố được sử dụng, lý thuyết các phản ứng cộng hưởng và không cộng hưởng... Các công thức trong chương này sẽ được áp dụng hầu hết trong các tính toán tốc độ phản ứng của các chương 3 và 4.

Chương 3: Chương này sẽ giới thiệu các phương pháp tính tốc độ của phản ứng 3 alpha. Nếu dựa theo cách giải bài toán tương tác lượng tử ba hạt của nhóm K. Ogata, M. Kan, M. Kamimura thì ta sẽ đi giải phương trình Schrodinger cho tương tác trực tiếp của ba hạt alpha để hình thành hạt nhân ${}^{12}\text{C}$. Trong khi đó phương pháp thứ hai sẽ giải bài toán ${}^{12}\text{C}$ được hình thành qua hai phản ứng ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$ và ${}^8\text{Be} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}^* (\rightarrow {}^{12}\text{C})$ (hai phản ứng này do Salpeter và Öpik đề xuất). Tốc độ phản ứng ba alpha theo hai phản ứng liên tiếp này được giải bởi nhiều nhà khoa học, trong đó có Fowler [4] giải vào năm 1967 và nhóm K. Nomoto, F. –K. Thielemann, và S. Miyaji [10] cũng giải bài toán này vào năm 1985.

Chương 4: Trong chương 3 đã giới thiệu hai phương pháp điển hình đã được sử dụng để tính tốc độ phản ứng 3 alpha. Trong chương này sẽ trình bày chi tiết bài toán tính tốc độ phản ứng ba alpha khi có thêm đóng góp của phân bố Lévy. Từ đó đánh giá kết quả thu được và thảo luận những hướng phát triển mới từ những kết quả tính toán.

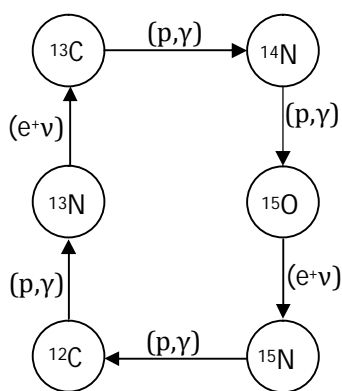
CHƯƠNG 1

TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU ^{12}C

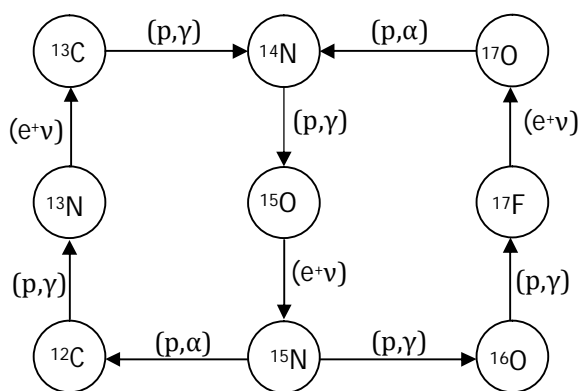
Cacbon đóng một vai trò quan trọng trong các quá trình tổng hợp các nguyên tố nặng, các chu trình CNO sinh ra nguồn năng lượng trong lòng Mặt Trời, các sao và có vai trò đặc biệt quan trọng trong sự hình thành và phát triển sự sống trên Trái Đất chúng ta. Với vai trò quan trọng như vậy, trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu một cách tổng quan tình hình nghiên cứu về nguyên tố đặc biệt quan trọng này.

1.1. Sơ lược về sự hình thành ^{12}C .

Như đã biết vật chất trong lòng các thể hệ sao thứ nhất bao gồm chủ yếu là hạt nhân hydro, năng lượng của các sao này được sinh ra chủ yếu trong các quá trình đốt cháy hydro thành helium theo chuỗi p – p. Trong khi đó hầu hết các sao thể hệ thứ hai lại bao gồm các nguyên tố nặng hơn được tổng hợp từ quá trình đốt cháy hydro với các nguyên tố khác. Những ngôi sao thể hệ thứ hai thường nặng hơn, có mật độ và nhiệt độ cao hơn Mặt Trời của chúng ta. Năng lượng trong các ngôi sao này có thể được sinh ra bởi quá trình đốt cháy hydro của những nguyên tố nặng hơn như Cacbon, Nitơ qua chu trình CN [2], hay chu trình kép CNO [2] được giả thiết bởi Bethe và Weizsacker được mô tả qua hình 1.1a và hình 1.1b dưới đây.



Hình 1.1a. Chu trình



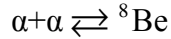
Hình 1.1b. Chu trình kép CNO

Hình 1.1. Chu trình CN và chu trình kép CNO

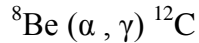
Như vậy trong cả chu trình CN và chu trình kép CNO năng lượng được sinh ra bằng cách tổng hợp các proton thành Heli, trong khi đó Cacbon không được sinh ra trong chu trình này. Vậy đâu là nguồn gốc sinh ra nguyên tố Cacbon?

1.1.1. Giả thiết của Salpeter và Öpik.

Như đã biết kết quả của quá trình đốt cháy hydro qua chuỗi p – p ở các thể hệ sao thể hệ thứ nhất chủ yếu tạo thành ^4He , và để giải thích cho sự hình thành ^{12}C thì Salpeter và Öpik đã đưa ra giả thuyết ^{12}C được hình thành qua hai bước liên tiếp như hình 1.2 , đầu tiên là quá trình tổng hợp hai hạt alpha.

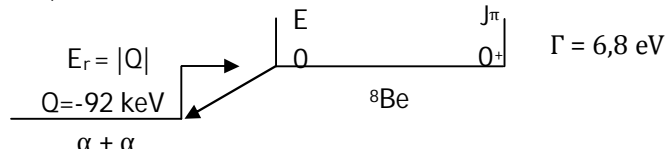


Sau đó ${}^8\text{Be}$ tiếp tục phản ứng với α để hình thành ^{12}C qua phản ứng:

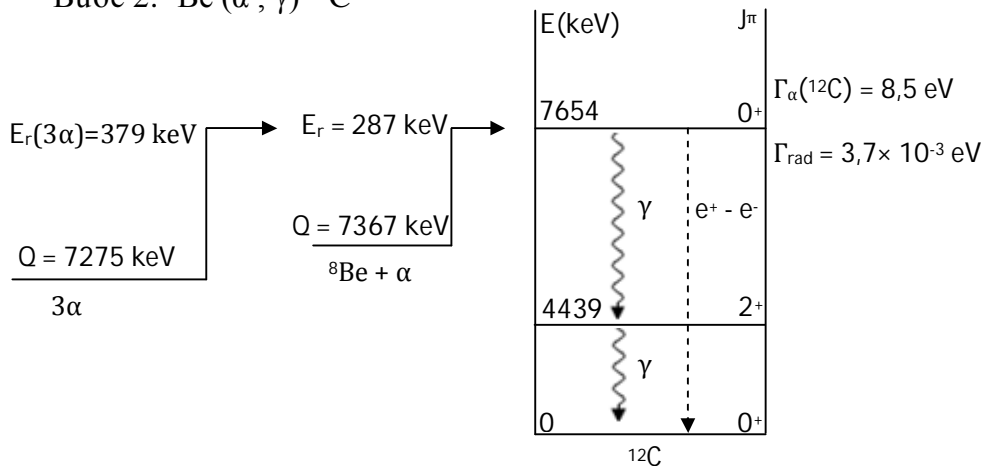


Tuy nhiên kết quả lý thuyết qua hai phản ứng trên không cho kết quả phù hợp với số liệu thực nghiệm về độ giàu của ^{12}C [2] nếu các hạt nhân ${}^8\text{Be}$ và ^{12}C tạo thành ở trạng thái cơ bản. Khi nghiên cứu về mâu thuẫn này vào năm 1953 Hoyle nhận thấy rằng nếu phản ứng ${}^8\text{Be} (\alpha, \gamma) {}^{12}\text{C}$ qua cộng hưởng của sóng s ($J^\pi = 0^+$) (hàm sóng mô tả chuyển động tương đối giữa hai hạt α và ${}^8\text{Be}$) gần năng lượng ngưỡng $E_{\text{th}} = 7.68 \text{ MeV}$ sẽ có sự phù hợp giữa lý thuyết và thực nghiệm. Trạng thái 0^+ này sau đó đã được thực nghiệm kiểm chứng.

Bước 1: $\alpha + \alpha \rightleftharpoons {}^8\text{Be}$



Bước 2: ${}^8\text{Be} (\alpha, \gamma) {}^{12}\text{C}$



Hình 1.2. Quá trình hình thành Cacbon

Trong hình vẽ 1.2 mô tả quá trình hình thành hạt nhân ^{12}C qua hai phản ứng liên tiếp. Ở giai đoạn thứ nhất hạt nhân ^8Be được hình thành ở trạng thái kích thích, vì xác suất phân rã ngược thành các hạt nhân alpha tự do nhỏ hơn xác suất phản ứng tạo ^8Be từ phản ứng thuận. Do đó ^8Be được tích lũy cho đến một lúc nào đó sẽ xảy ra quá trình cân bằng giữa số ^8Be sinh ra và số ^8Be bị phân rã. Ở bước kế tiếp một hạt nhân ^8Be sẽ bắt một hạt alpha để hoàn thành quá trình tạo thành hạt nhân ^{12}C . Trong hình vẽ 1.2 các đại lượng Γ_α là độ rộng phân rã alpha của ^{12}C , Γ_γ là độ rộng phân rã điện từ để trở về trạng thái cơ bản của hạt nhân ^{12}C . Ngoài ra còn có các quá trình phân rã tạo cặp e^+e^- với độ rộng Γ_{pair} . Độ rộng toàn phần Γ được định nghĩa là:

$$\Gamma = \Gamma_\alpha + \Gamma_\gamma + \Gamma_{\text{pair}}$$

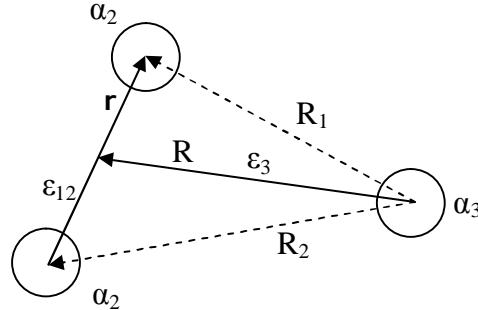
Trong lý thuyết tính tốc độ phản ứng xảy ra trên các sao được nhiều nhà khoa học quan tâm và tiến hành các tính toán, thực hiện các thí nghiệm kiểm chứng mà nổi bật là các tính toán của Fowler [4] đã tính cho rất nhiều các phản ứng, trong đó có bài toán phản ứng ba alpha. Dựa trên các tính toán này, NACRE đã tổng hợp các kết quả tính toán. Số liệu mà NACRE tập hợp được chấp nhận rộng rãi và sử dụng các kết quả này như những giá trị chuẩn.

Ngoài giả thuyết về sự hình thành ^{12}C qua hai phản ứng trên, trong một số nghiên cứu mới đây, người ta đã vận dụng phương pháp CDCC trong tương tác lượng tử ba hạt để giải bài toán tổng hợp trực tiếp từ ba hạt alpha thành hạt nhân ^{12}C mà không qua hai phản ứng liên tiếp như trong giả thiết của Salpeter và Öpik. Dưới đây sẽ giới thiệu tổng quan về phương pháp CDCC.

1.1.2. Vận dụng phương pháp CDCC để giải bài toán 3 alpha.

Bài toán này được một nhóm các nhà vật lý người Nhật là T. Matsumoto, T. Kamizato, K.Ogata, Y. Iseri, E. Hiyama, M. Kamimura, and M. Yahiro [12] xây dựng và tính toán phức tạp được giải bằng các chương trình đặc biệt trên một hệ thống máy tính. Trong tương tác của ba hạt alpha, năng lượng tương đối giữa α_1 và α_2 được ký hiệu là ε_{12} , năng lượng tương đối của hạt α_3 với khối tâm của hai hạt α_1 và α_2 được ký hiệu là ε_3 , còn năng lượng toàn phần trong hệ quy chiếu khối tâm

của hệ 3 alpha là E. Với việc giải trực tiếp phương trình Schrodinger cho hệ ba hạt, ta có thể tính được tốc độ phản ứng cho hệ 3 alpha [12].



Hình 1.3. hệ 3 alpha

Phương trình Schrodinger cho hệ ba hạt có dạng:

$$[T_r + T_R + v(r) + v(R_1) + v(R_2) - E]\Psi(r, R) = 0 \quad (1.1)$$

Trong phương trình trên T_r và T_R là toán tử động năng tương ứng với các vector tọa độ \mathbf{r} và \mathbf{R} , và v là thế tương tác (có bao gồm cả thành phần lực hạt nhân và thế Coulomb) giữa hai hạt alpha tương ứng.

Trạng thái của hệ α_1 và α_2 được xác định bởi số sóng k và moment xung lượng l trong chuyển động tương đối của hai hạt này. Ứng với mỗi giá trị của l , ta sẽ chia hàm mô tả trạng thái liên tục của hệ α_1 và α_2 thành những trạng thái riêng biệt tương ứng với giá trị $k_i \leq k \leq k_{i-1}$, và những hàm mô tả trạng thái phản ứng liên tục trong khoảng thứ i được lấy trung bình với hàm trọng số $f_{il}(k)$.

Với cách phân chia này, từ phương trình (1.1) ta sẽ thu được một hệ các phương trình liên kết theo các hàm trạng thái (đã được lấy trung bình và đặc trưng cho mỗi khoảng). Giải hệ phương trình này, ta có thể tìm được hàm sóng toàn phần cho hệ 3 alpha, từ đó ta có thể tính được tốc độ phản ứng toàn phần.

1.2. Các thí nghiệm đo ^{12}C .

Ở lõi những ngôi sao có khối lượng lớn gấp 1,5 lần khối lượng Mặt trời trở lên sẽ có nhiệt độ cao, đủ để cho ba hạt alpha kết hợp với nhau tạo thành ^{12}C . Bên cạnh đó việc xác định tốc độ phản ứng thì đặc biệt quan trọng để xác định độ giàu của các nguyên tố, cũng như kích thước lõi sắt trong các ngôi sao. Hạt nhân ^{12}C có

thể được hình thành qua hai vùng phản ứng không cộng hưởng hoặc cộng hưởng của phản ứng tổng hợp từ các hạt nhân ^4He . Vì vậy việc tiến hành đo các mức cộng hưởng và độ rộng của chúng là rất quan trọng để có thể tính được tốc độ phản ứng toàn phần. Dưới đây chúng ta sẽ đi qua một vài thí nghiệm như thế.

1.2.1. Thí nghiệm xác định trạng thái kích thích thứ nhất của ^{12}C (4.44 MeV).

Trạng thái kích thích thứ nhất của ^{12}C (4.44 MeV) được hình thành từ phân rã γ của trạng thái 0^+ tại mức $E = 7,65$ MeV được W. Kaina, V. Soergel, W. Trost và G. Zinser [14] xác nhận qua phân tích phổ phân rã β của ^{12}B và ^{12}N vào năm 1981. Họ nhận thấy rằng phổ thực nghiệm phân rã β hoàn toàn phù hợp với những kênh tương tác yếu tạo thành những trạng thái kích thích của ^{12}C , đặc biệt là với trạng thái kích thích 4,44 MeV [14].

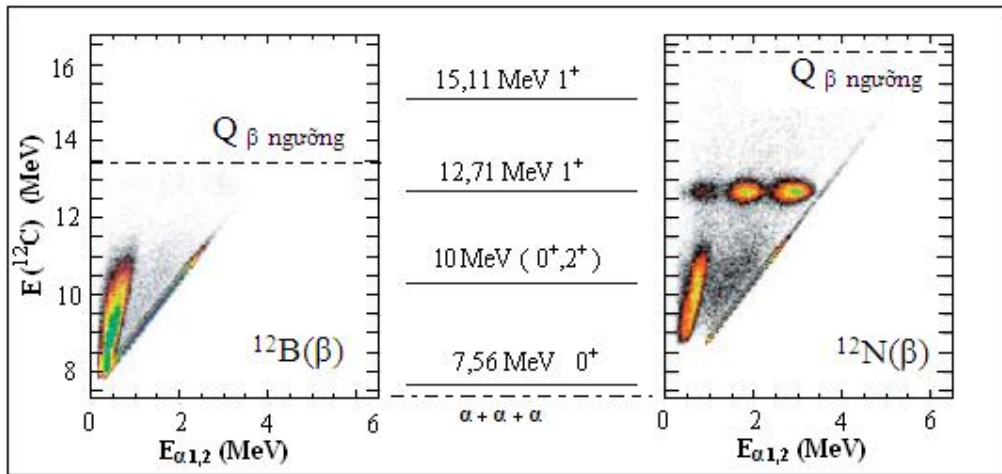
1.2.2. Thí nghiệm của Hans O. U. Fynbo, Christian Aa. Diget, Uffe C. Bergmann.

Một thí nghiệm khác của nhóm các nhà vật lý gồm các thành viên Hans O. U. Fynbo, Christian Aa. Diget, Uffe C. Bergmann... [8] thực hiện các phép đo và phân tích tại CERN và JYVÄSKYLÄ cũng đo các mức cộng hưởng và độ rộng các mức cộng hưởng từ phân rã ngược của ^{12}C thành 3 hạt alpha.

Trong thí nghiệm tại JYVÄSKYLÄ, ^{12}N được hình thành qua phản ứng $^{12}\text{C}(p,n)^{12}\text{N}$ bởi một chùm tia proton năng lượng 40 – MeV, hạt nhân ^{12}N tạo thành có chu kỳ bán rã 11,0ms sẽ phân rã β để tạo thành ^{12}C ở trạng thái kích thích. Trong khi đó tại CERN người ta dùng một chùm tia proton năng lượng 1 GeV để bắn phá lên bia Tantalum. Kết quả sau khi bắn phá, sản phẩm thu được có chứa ^{12}B ở trạng thái kích thích. Hạt nhân ^{12}B ở trạng thái kích thích sau đó sẽ phân β để tạo thành ^{12}C ở trạng thái kích thích.

Phân tích phổ năng lượng phân rã β của cả ^{12}B và ^{12}N , so sánh các giá trị Q_β (năng lượng ngưỡng) trong hai phân rã người ta có thể tìm được các mức kích thích khác nhau của ^{12}C . Phân tích kết quả thí nghiệm, họ đã tìm thấy mức cộng hưởng gần 11 MeV, nhưng chưa xác nhận được cộng hưởng ở mức 9,1 MeV. Bên cạnh đó

qua thí nghiệm này họ còn nhận thấy sự giao thoa ở hai vùng cộng hưởng đã ảnh hưởng tới phép đo phổ của họ. Hình vẽ 1.4 dưới đây mô tả kết quả thí nghiệm của họ, trong đó vệt màu nằm dọc theo đường chéo của hai hình 1a và hình 1b mô tả hạt α bức xạ trực tiếp từ hạt nhân ^{12}C ở trạng thái kích thích (sau phân rã β từ ^{12}B và ^{12}N), còn vệt màu nằm bên trái của đường chéo trong hình 1a và hình 1b mô tả năng lượng hai hạt α bức xạ từ ^8Be (0^+ và 2^+).

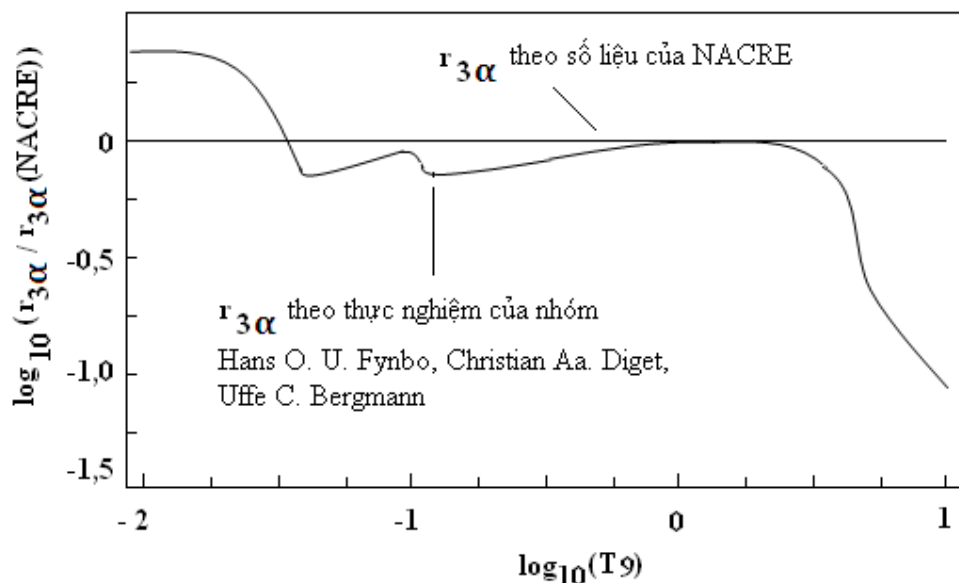


Hình 1.4. Đo cộng hưởng ^{12}C từ phân rã β của ^{12}B và ^{12}N [8]

Với các số liệu đo được nhóm các nhà khoa học này đã tính lại tốc độ phản ứng 3 alpha trong vùng nhiệt độ từ 10^7 K tới 10^{10} K, kết quả là có một sự khác biệt đáng kể từ số liệu tốc độ phản ứng của nhóm này so với số liệu chuẩn của NACRE (Nuclear Astrophysics Compilation of Reaction Rates).

Cụ thể ở nhiệt độ thấp hơn $5 \cdot 10^7$ K thì số liệu của nhóm này lớn hơn so với số liệu chuẩn của NACRE, trong khi ở nhiệt độ lớn hơn 10^9 K tốc độ phản ứng ba alpha của nhóm lại nhỏ hơn nhiều so với tốc độ phản ứng từ NACRE được mô tả qua hình vẽ 1.5.

Trong hình vẽ 1.5 đường nằm ngang ở vị trí 0 là đường chuẩn so với giá trị của NACRE, vì ở đó $r_{3\alpha}/r_{3\alpha}(\text{NACRE}) = 1$, do đó $\log_{10}(r_{3\alpha}/r_{3\alpha}(\text{NACRE})) = 0$. Đường cong trên hình vẽ chỉ ra giá trị tính toán bằng thực nghiệm.



Hình vẽ 1.5. Tốc độ thực nghiệm so với NACRE

Qua nhiều các thí nghiệm, người ta đã xác định được một số tính chất từ các trạng thái cộng hưởng cho các trạng thái kích thích của ^{12}C được tóm tắt qua bảng 1.1 [15] dưới đây:

Bảng 1.1. Các tính chất của các mức cộng hưởng ^{12}C [15]

E_r (MeV)	J^π	Γ_r	$^8\text{Be} (0^+)$	$^8\text{Be} (2^+)$
7,6542	0^+	8,5 eV	> 96%	< 4%
4,44	2^+	1,1 keV	chưa xác định %	chưa xác định %
9,641	3^-	34 keV	> 96%	< 4%
10,3	0^+	3 MeV	> 90%	< 10%
10,849	1^-	315 keV	Đa số	Có xảy ra
11,828	2^-	260 keV	Không xảy ra	Có xảy ra
12,710	1^+	18,1 eV	Không xảy ra	Có xảy ra
13,352	2^-	375 keV	Không xảy ra	Có xảy ra
14,083	4^+	258 keV	17%	83%
15,110	1^+	43,6 eV	Không xảy ra	Có xảy ra

Trong bảng 1.1

- Cột 1: Năng lượng các mức cộng hưởng.
- Cột 2: Spin – chẵn lẻ.
- Cột 3: Độ rộng mức cộng hưởng.
- Cột 4: Phân rã của ^{12}C theo kênh $^8\text{Be} (0^+)$
- Cột 5: Phân rã của ^{12}C theo kênh $^8\text{Be} (2^+)$

Trong bảng 1.1, các mức cộng hưởng 11,828 MeV, 12,710 MeV, 13,352 MeV và 15,110 MeV có chẵn lẻ không tự nhiên (unnatural parity) sẽ được tìm hiểu trong chương 2.

CHƯƠNG 2

CƠ SỞ LÝ THUYẾT TÍNH TỐC ĐỘ PHẢN ỨNG.

Trong chương này chúng ta sẽ đi xây dựng công thức xác định tốc độ phản ứng hạt nhân trong lòng các ngôi sao. Vì tốc độ phản ứng là đại lượng rất quan trọng trong vật lý thiên văn học hạt nhân, dựa vào đại lượng này ta có thể xác định được thành phần các nguyên tố trong lòng các ngôi sao... Vì vậy trong chương này sẽ trình bày hệ thống những kiến thức cơ bản về sự phụ thuộc của tốc độ phản ứng vào dạng phân bố vận tốc, vào tiết diện phản ứng của các phản ứng cộng hưởng và không cộng hưởng...

2.1. Cơ sở lý thuyết.

Xét một phản ứng: $A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4 + Q$ trong đó A_1 là hạt tới với vận tốc v , A_2 là hạt bia coi như đứng yên. Về mặt hình học, hạt A_1 sẽ tương tác với A_2 nếu hạt A_1 nằm trong tiết diện tương tác

$$\sigma = \pi (R_1 + R_2)^2 . \quad (2.1)$$

trong đó R_1 và R_2 lần lượt là bán kính của hạt nhân tới A_1 và hạt nhân bia A_2 .

Khả năng tương tác giữa hai hạt sẽ cao nếu tiết diện σ này càng lớn, σ được gọi là tiết diện phản ứng. Trong thực tế, khả năng tương tác của các hạt còn phụ thuộc vào nhiều yếu tố như điện tích, tốc độ, ... của các hạt tham gia tương tác. Do đó tiết diện phản ứng được xác định bởi công thức [3]:

$$\sigma = \pi \lambda^2 \quad (2.2)$$

$$\lambda = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{\hbar}{(2m_1 E_1)^{1/2}} \text{ là bước sóng De - Broglie} \quad (2.3)$$

Trong đó m_1 và m_2 lần lượt là khối lượng của hạt tới và hạt nhân bia, còn E_1 là năng lượng của hạt tới. Vì E_1 là hàm theo biến vận tốc v nên tiết diện phản ứng $\sigma = \sigma(v)$

Để đơn giản ta xét một khối khí chỉ gồm hai loại hạt nhân A_1 và A_2 . Gọi n_1 là số hạt nhân A_1 có trong 1cm^3 và n_2 là số hạt nhân A_2 có trong 1cm^3 . Giả sử một hạt A_1 chuyển động với vận tốc v tới tương tác với n_2 hạt bia A_2 đứng yên, khả năng để

một hạt A_1 phản ứng với n_2 hạt A_2 sẽ là $F = n_2 \sigma(v)$. Bây giờ nếu có một dòng hạt A_1 với mật độ dòng hạt $J = n_1 v$ tới tương tác với n_2 hạt A_2 thì số phản ứng trong 1 cm^3 trong 1 s (ký hiệu là r) được gọi là tốc độ phản ứng.

$$r = J.F = n_1 n_2 \sigma(v) v \quad (2.4)$$

Do hạt tới A_1 có vận tốc thay đổi trong khoảng từ 0 đến ∞ nên nếu gọi $\Phi(v)$ là hàm phân bố vận tốc của hạt tới thì đại lượng $\langle \sigma v \rangle$ ở (2.4) được xác định bởi:

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^{\infty} \Phi(v) \sigma(v) v dv \quad (2.5)$$

Đại lượng $\langle \sigma v \rangle$ trong (2.5) mô tả tốc độ phản ứng cho một cặp hạt. Công thức (2.4) được viết lại:

$$r = J.F = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle \quad (2.6)$$

Với tích số $n_1 n_2$ là số cặp hạt nhân $A_1 A_2$ trong 1 cm^3 . Vậy

$$r = J.F = \frac{n_1 n_2}{(1 + \delta_{12})} \langle \sigma v \rangle \quad (2.7)$$

Ở đây xuất hiện δ_{12} do trường hợp các hạt A_1 và A_2 là đồng nhất.

$$\text{Trong công thức (2.7), } n_i = \rho N_A \frac{X_i}{A_i}, \quad X_i (i = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

Trong đó X_i là tỉ lệ phần trăm về khối lượng của hạt nhân loại A_i , được gọi là độ giàu của nguyên tố A_i , $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ là số Avogadro.

Từ các công thức (2.5) ta có thể nhận thấy tốc độ phản ứng phụ thuộc vào hàm phân bố $\Phi(v)$ và tiết diện phản ứng $\sigma(v)$. Dưới đây ta sẽ lần lượt khảo sát hai yếu tố này.

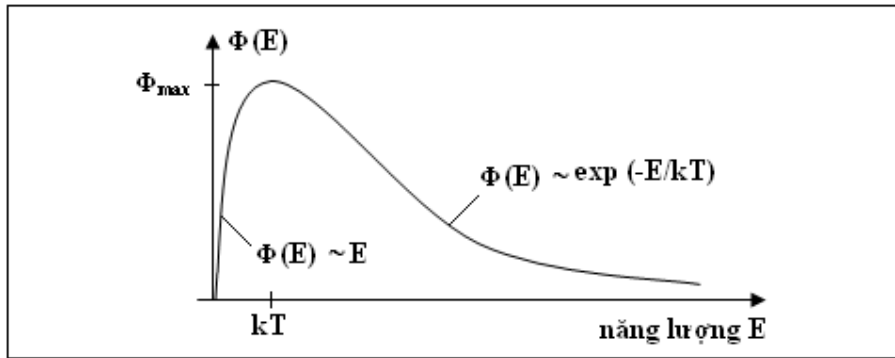
2.2. Phân bố Maxwell – Boltzmann.

Vật chất hạt nhân trong lòng các ngôi sao là một hệ nhiệt động và ở trạng thái cân bằng nhiệt động. Do đó phân bố tốc độ của các hạt nhân trong lòng các ngôi sao tuân theo phân bố Maxwell Boltzmann [2].

$$\Phi(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (2.9)$$

hay có thể biểu diễn phân bố Maxwell – Boltzmann theo năng lượng $E = \frac{mv^2}{2}$

$$\Phi(E) = \left(\frac{8m}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \quad (2.10)$$



Hình 2.1. Phân bố Maxwell – Boltzmann theo năng lượng

Trong một hệ các hạt A_1 và A_2 đều chuyển động tương đối đến tương tác với nhau. Trong trường hợp này để đơn giản ta sẽ giải bài toán trong hệ quy chiếu khối tâm. Như vậy nếu gọi v là vận tốc tương đối giữa các hạt, khối lượng rút gọn của các hạt tham gia tương tác là $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ thì tốc độ phản ứng trên một cặp hạt

$\langle \sigma v \rangle$ trong phương trình (2.5) được viết lại:

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(v_1) \Phi(v_2) \sigma(v) v dv_1 dv_2 \quad (2.11)$$

Trong đó:

$$\Phi(v_1) = 4\pi v_1^2 \left(\frac{m_1}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2kT}\right) \quad (2.12)$$

$$\Phi(v_2) = 4\pi v_2^2 \left(\frac{m_2}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_2^2}{2kT}\right) \quad (2.13)$$

là hàm phân bố vận tốc Maxwell – Boltzmann cho hai loại hạt tham gia tương tác.

Vận tốc v_1 và v_2 của các hạt có liên hệ với tốc độ tương đối v và tốc độ chuyển động của khối tâm V . Như vậy ta có thể đổi biến v_1 và v_2 trong các công thức (2.12) và (2.13) sang các biến số v và V . Như vậy ta có thể biểu diễn công thức (2.11) theo v và V dưới dạng:

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(V) \Phi(v) \sigma(v) v dv dV \quad (2.14)$$

Hàm phân bố đã được chuẩn hóa, nghĩa là:

$$\int_0^\infty \Phi(V) dV = 1 \quad (2.15)$$

Phương trình (2.14) trở thành:

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \Phi(v) \sigma(v) v dv \quad (2.16)$$

Từ hai phương trình (2.9) và (2.14) ta suy ra tốc độ phản ứng cho một cặp hạt trong hệ quy chiếu khối tâm có dạng:

$$\langle \sigma v \rangle = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \sigma(v) \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) dv \quad (2.17)$$

Hay theo năng lượng $E = \frac{1}{2} \mu v^2$ có dạng:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty \sigma(E) E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE \quad (2.18)$$

Sự phụ thuộc của tốc độ phản ứng vào tiết diện sẽ được xem xét chi tiết khi nghiên cứu về các phản ứng không cộng hưởng và cộng hưởng các hạt mang điện.

2.3. Phản ứng không cộng hưởng các hạt mang điện.

Xét một hạt nhân A_1 mang điện tích Z_1 chuyển động dọc theo trục x với năng lượng E tới tương tác với hạt nhân bia A_2 đứng yên mang điện tích Z_2 . Thế năng tương tác giữa hai hạt là thế Coulomb $V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$. Hàm sóng mô tả cho chuyển động hạt tới là sóng phẳng [1].

$$\Psi = Ae^{i(\omega t + kx)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(Et + \sqrt{2m[E-V]}x)} \quad (2.19)$$

Khi $E > V$ các hạt tham gia tương tác có thể vượt qua rào thế Coulomb, do đó xác suất xuyên rào bằng 1.

Trong trường hợp $E < V$ ($E - V < 0$) giải phương trình Schrodinger ta có thể tính được xác suất xuyên rào được tính theo biểu thức [2]:

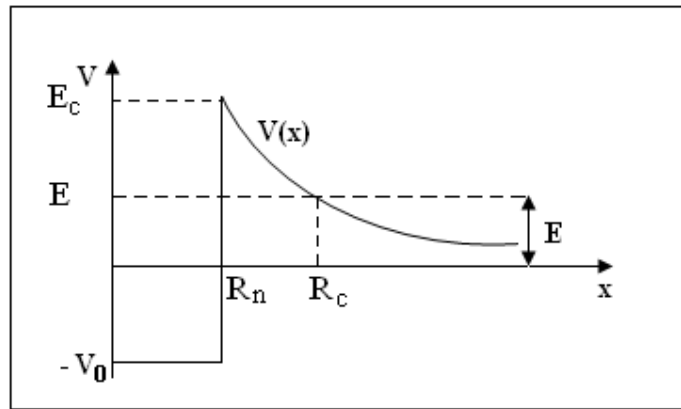
$$P = \exp \left\{ -2KR_c \left[\frac{\arctan \left(\frac{R_c}{R_n} - 1 \right)^{1/2}}{\left(\frac{R_c}{R_n} - 1 \right)^{1/2}} - \frac{R_n}{R_c} \right] \right\} \quad (2.20)$$

trong đó $K = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} (E_c - E) \right]^{1/2}$ với E là năng lượng của hạt tới. (2.21)

với $R_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$ là vị trí xuyên rào (2.22)

$$E_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_n} \text{ là rào thế Coulomb} \quad (2.23)$$

$R_n = R_1 + R_2 = 1,3 \cdot (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) 10^{-13}$ (cm) là tổng hai bán kính của hai hạt nhân tham gia tương tác.



Hình 2.2. Thế xuyên rào Coulomb của một hạt mang điện.

Ở năng lượng thấp $E \ll E_c$ tương ứng với $R_c \gg R_n$, công thức (2.20) có thể viết lại dưới dạng tương đương [3]:

$$P = \exp(-2\pi\eta) \quad (2.24)$$

Đại lượng $\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \sim \frac{1}{E^{1/2}}$ là tham số Sommerfeld (2.25)

Vì tiết diện phản ứng tỉ lệ với thể xuyên rào nên:

$$\sigma(E) \sim \exp(-2\pi\eta) \quad (2.26)$$

Theo công thức (2.2) và (2.3), tiết diện phản ứng tỉ lệ nghịch với E.

$$\sigma(E) \sim \frac{1}{E} \quad (2.27)$$

Từ (2.26) và (2.27) ta suy ra tiết diện phản ứng được tính theo công thức:

$$\sigma(E) = S(E) \frac{1}{E} \exp(-2\pi\eta) \quad (2.28)$$

Trong đó S(E) (MeV.barn) là hệ số thiên văn, nói chung là phụ thuộc vào năng lượng của hạt tới.

Để đơn giản cho các biến đổi sau này, ta đặt

$$E_G^{1/2} = 0,989 Z_1 Z_2 A^{1/2} \text{ (MeV)}^{1/2} \quad (2.29)$$

trong đó E_G , được gọi là năng lượng Gamow. $A = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$ là số khối rút gọn của hệ

hai hạt tham gia tương tác.

Với cách đặt này phương trình (2.28) được viết lại:

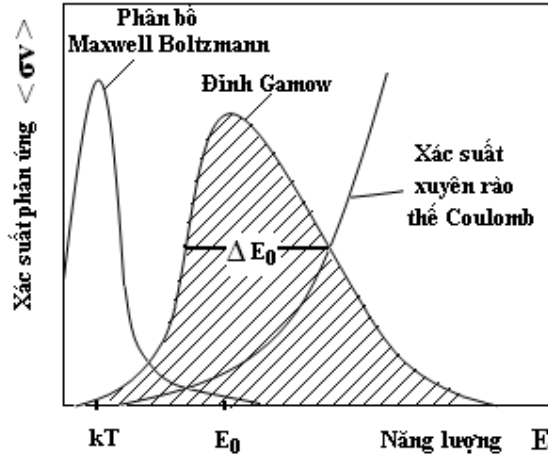
$$\sigma(E) = S(E) \frac{1}{E} \exp\left(-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}\right) \quad (2.30)$$

Từ phương trình (2.18) và (2.30) tốc độ phản ứng được tính bởi công thức:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - \left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}\right) dE \quad (2.31)$$

Trong công thức tốc độ phản ứng (2.31), thành phần $\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$ mô tả sự phụ thuộc vào phân bố Maxwell – Boltzmann, trong khi đó thành phần $\exp\left(-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}\right)$ mô tả sự phụ thuộc của tốc độ phản ứng vào thể xuyên rào

Coulomb. Như vậy tốc độ phản ứng của một cặp hạt sẽ phụ thuộc vào tích số của hai thành phần và được biểu diễn qua hình vẽ 2.3 dưới đây:



Hình 2.3. Đỉnh Gamow nơi xác suất phản ứng xảy ra lớn nhất.

Một vấn đề nữa cũng cần được quan tâm là ta phải đi xác định năng lượng E_0 mà ở đó tốc độ phản ứng trên một cặp hạt đạt giá trị cực đại. Để tìm được giá trị này ta đi giải phương trình đạo hàm bậc nhất theo năng lượng của (2.31). Cũng cần chú ý là trong vùng phản ứng không cộng hưởng thì hệ số thiên văn thay đổi rất chậm và có thể coi là hằng số. Do đó $S(E) = S(E_0)$ và $S(E)$ có thể đưa ra ngoài dấu tích phân trong phương trình (2.31).

Phương trình (2.31) có thể viết lại dưới dạng:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} S(E) \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{E}{kT} - \left(\frac{E_G}{E} \right)^{1/2} \right) dE \quad (2.32)$$

Vì vậy việc giải phương trình đạo hàm bậc nhất $\frac{d\langle \sigma v \rangle}{dE} = 0$ theo năng lượng

sẽ trở nên đơn giản hơn.

$$\text{Ta xác định được } E_0 = \left(\frac{E_G^{1/2} kT}{2} \right)^{2/3} \text{ (MeV)} \quad (2.33)$$

$$\text{Hay dưới dạng số } E_0 = 0,12204 (Z_1^2 Z_2^2 A)^{1/3} T_9^{2/3} \text{ (MeV)} \quad (2.34)$$

Trong công thức (2.34) thì $T_9 = T \cdot 10^9 \text{ K}$

Nhận thấy phần gạch chéo trong hình 2.3 xấp xỉ dạng Gauss. Nên ta có thể biểu diễn đỉnh Gamow tương đương với hàm Gauss như sau [2]:

$$\exp\left(-\frac{E}{kT} - \left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}\right) = I_{\max} \exp\left(-\left(\frac{E-E_0}{\Delta/2}\right)^2\right) \quad (3.35)$$

trong đó
$$I_{\max} = \exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right) = \exp(-\tau) \quad (2.36)$$

với
$$\tau = \frac{3E_0}{kT} \quad (2.37)$$

hay
$$\tau = 4,2487\left(Z_1^2 Z_2^2 A\right)^{-1/3} T_9^{-1/3} \quad (2.38)$$

Trong công thức (2.36) thì I_{\max} là giá trị cực đại của tích phân

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{kT} - \left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}\right) dE \quad (2.39)$$

Trong hình vẽ 2.3, Δ là độ rộng của đỉnh Gamow. Giải phương trình đạo hàm bậc hai theo năng lượng (2.35) người ta xác định được giá trị [2]:

$$\Delta = 4 \left(\frac{E_0 kT}{3}\right)^{1/2} \quad (2.40)$$

Phần gạch chéo trong hình vẽ 3.2 mô tả sự phụ thuộc tốc độ phản ứng vào năng lượng E , tốc độ phản ứng toàn phần sẽ đạt giá trị lớn nhất tại năng lượng E_0 . Đa số các phản ứng xảy ra trong vùng giới hạn từ $E_0 - \Delta/2$ đến $E_0 + \Delta/2$.

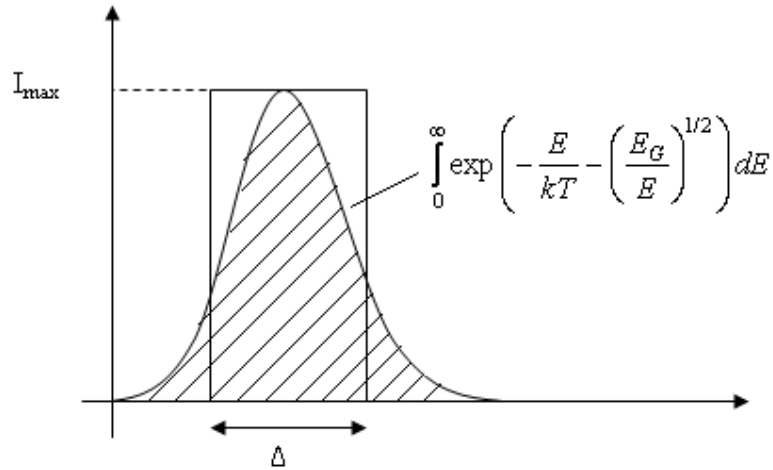
Bây giờ ta đi xét riêng tích phân (2.39). Theo tính chất đối xứng của hàm Gauss, diện tích gạch chéo trong hình 2.4 giới hạn bởi tích phân (2.39) với trục hoành sẽ gần bằng với diện tích của một hình chữ nhật có chiều cao I_{\max} , độ rộng Δ .

Diện tích hình chữ nhật trong hình vẽ 2.4 được tính:

$$\Delta \cdot I_{\max} = \frac{4}{\sqrt{3}} (E_0 kT)^{1/2} \exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} (E_0 kT)^{1/2} \exp(-\tau) \quad (2.41)$$

Để diện tích giới hạn bởi tích phân (2.39) bằng với diện tích của hình chữ nhật $\Delta \cdot I_{\max}$ thì ta phải nhân diện tích hình chữ nhật đó với một hệ số. Để biểu

thức toán học có dạng đơn giản thì hệ số đó được chọn có dạng $F(\tau) \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.



Hình 2.4. Hàm Gauss và phép tính gần đúng.

Tích phân (2.39) được viết lại dưới dạng tương đương:

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{kT} - \left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}\right) dE = F(\tau) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Delta \exp(-\tau) \quad (2.42)$$

Khai triển hệ số $F(\tau)$ theo chuỗi Maclaurin dưới dạng [2]:

$$F(\tau) = 1 + \frac{5}{12} \frac{1}{\tau} - \frac{35}{288} \frac{1}{\tau^2} + \dots \quad (2.43)$$

Trong một vài phản ứng, giá trị của $F(\tau)$ có giá trị xấp xỉ 1.

$$p + p \quad F(\tau) = 1,030,$$

$$p + {}^{14}\text{N} \quad F(\tau) = 1,0068,$$

$$\alpha + {}^{12}\text{C} \quad F(\tau) = 1,0032,$$

$${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O} \quad F(\tau) = 1,00076,$$

Như vậy từ (2.31), (2.42) và (2.43) ta suy ra tốc độ phản ứng:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2} \frac{\Delta}{(kT)^{3/2}} S(E_0) \left(1 + \frac{5}{12\tau} + \dots\right) \exp(-\tau) \quad (2.44)$$

Vì phân tử $S(E)$ là hàm biến đổi chậm theo năng lượng. Do đó để đơn giản, ta sẽ khai triển $S(E)$ thành chuỗi Maclaurin quanh năng lượng 0 và bỏ qua các số hạng lớn hơn bậc hai.

$$S(E) = S(0) + S'(0)E + S''(0)E^2 + \dots \quad (2.45)$$

$$\text{Hay } S(E) = S(0) \left(1 + \frac{S'(0)}{S(0)}E + \frac{S''(0)}{S(0)}E^2 + \dots \right) \quad (2.46)$$

Thay các công thức (2.42); (2.43) và (2.46) vào công thức (2.31); ta suy ra công thức (2.48) nếu như ta đặt:

$$S_{eff}(E_0) = S(0) \left[1 + \frac{5}{12\tau} + \frac{S'(0)}{S(0)} \left(E_0 + \frac{35}{36}kT \right) + \frac{1}{2} \frac{S''(0)}{S(0)} \left(E_0^2 + \frac{89}{36E_0}kT \right) \right] \quad (2.47)$$

Vậy tốc độ của phản ứng không cộng hưởng được xác định bởi công thức:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{2}{\mu} \right)^{1/2} \frac{\Delta}{(kT)^{3/2}} S_{eff}(E_0) \exp(-\tau) \quad (2.48)$$

2.4. Phản ứng qua kênh cộng hưởng hẹp – riêng biệt.

Một công hưởng đơn trong phản ứng $A_1 + A_2 \rightarrow C \rightarrow A_3 + A_4 + Q$ được biểu diễn theo một hàm phụ thuộc năng lượng, công thức Breit – Wigner [2]:

$$\sigma = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2J_1+1)(2J_2+1)} (1 + \delta_{12}) \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (2.49)$$

Trong công thức (2.49) E_r là năng lượng cộng hưởng được tính trong hệ quy chiếu khối tâm của hạt 1 và 2, Γ_a là độ rộng riêng phần trong phân rã ngược để tạo thành hạt 1 và 2, còn Γ_b là độ rộng riêng phần trong phân rã của hạt 3 và 4, còn độ rộng toàn phần Γ là tổng các độ rộng riêng phần.

$$\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b + \dots$$

Một trạng thái cộng hưởng là hẹp nếu $\Gamma \ll E_r$

Mặt khác như ta biết năng lượng E và xung lượng p liên hệ theo công thức:

$$E = \frac{p^2}{2\mu} \quad (2.50)$$

$$\text{trong đó } p = \hbar k = \frac{\hbar}{\lambda} \quad (2.51)$$

Từ (2.49) và (2.50) và (2.51) ta suy ra

$$\sigma = \frac{\pi \hbar^2}{2\mu E} \frac{2J+1}{(2J_1+1)(2J_2+1)} (1+\delta_{l_2}) \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E-E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (2.52)$$

Đặt
$$\omega = \frac{2J+1}{(2J_1+1)(2J_2+1)} (1+\delta_{l_2}) \quad (2.53)$$

vậy
$$\sigma = \frac{\pi \hbar^2}{2\mu E} \frac{\omega \Gamma_a \Gamma_b}{(E-E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (2.54)$$

Giá trị của $\pi\lambda^2$ trong công thức (2.49) trong hệ quy chiếu khối tâm, tính theo năng lượng E (MeV) và tiết diện phản ứng σ được tính theo đơn vị (barn) là [4]:

$$\pi\lambda^2 = \frac{0,6566}{AE} \quad (2.55)$$

vậy
$$\sigma = \frac{0,6566}{AE} \frac{\omega \Gamma_a \Gamma_b}{(E-E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (2.56)$$

Tuy nhiên dù phản ứng có xảy theo kênh cộng hưởng hay không cộng hưởng thì các định luật bảo toàn tính chẵn lẻ và momen động lượng vẫn phải được thỏa mãn. Nếu gọi J_1, J_2 là spin của các hạt ở kênh vào của phản ứng, l là momen quỹ đạo tương đối của chúng và J là momen động lượng của ở trạng thái kích thích của hạt nhân hợp phân thì:

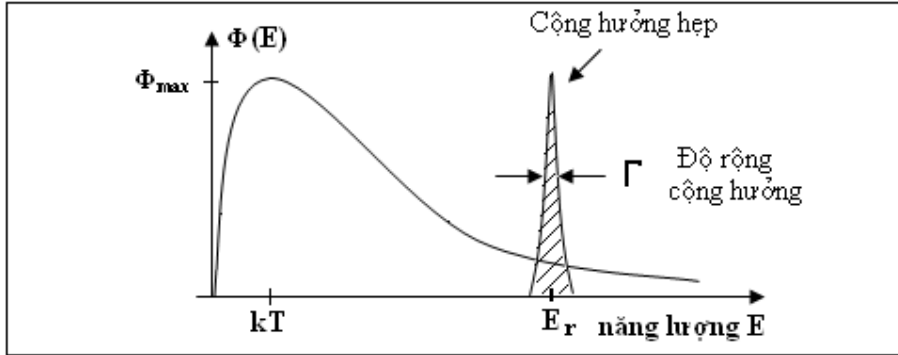
$$J_1 + J_2 + l = J \quad (2.57)$$

Với những hạt có spin bằng 0 ($J_1 = J_2 = 0$) thì $J = l$. Áp dụng định luật bảo toàn tính chẵn lẻ ta có công thức liên hệ:

$$(-1)^l \pi(J_1) \pi(J_2) = \pi(J) \quad (2.58)$$

Ở đây $\pi(J_1)$ và $\pi(J_2)$ tính chẵn lẻ của các hạt tham gia tương tác, $\pi(J)$ là tính chẵn lẻ của trạng thái cộng hưởng. Với những hạt có spin 0 thì $\pi(J_1) = \pi(J_2) = +1$. Khi đó $(-1)^l = \pi(J)$. Như vậy tính chẵn lẻ của trạng thái kích thích được xác định bởi momen quỹ đạo l , những trạng thái này được gọi là có tính chẵn lẻ tự nhiên (natural parity). Ngược lại nếu $(-1)^l \neq \pi(J)$ thì trạng thái kích thích sẽ không được hình thành và ta nói nó có tính chẵn lẻ không tự nhiên (unnatural parity). Với tiết

diện phản ứng (2.54), tốc độ phản ứng cho một cặp hạt được xác định bởi công thức:



Hình 2.5 . Cộng hưởng hẹp

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \sigma_{BW}(E) E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE \quad (2.59)$$

Trong công thức (2.59) $\sigma_{BW}(E)$ là tiết diện theo công thức Breit – Wigner (2.54). Đối với các vùng cộng hưởng hẹp (hình vẽ), hàm phân bố Maxwell – Boltzmann $\sim \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$ thay đổi rất ít khi đi qua vùng cộng hưởng.

Tốc độ phản ứng trên một cặp hạt được xác định bởi:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E_r}{kT}\right) \int_0^{\infty} \sigma_{BW}(E) E dE \quad (2.60)$$

Tích phân

$$\int_0^{\infty} \sigma_{BW}(E) E dE = \frac{\pi \hbar^2}{2\mu} \omega \Gamma_a \Gamma_b \int_0^{\infty} \frac{1}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} dE \quad (2.61)$$

suy ra
$$\int_0^{\infty} \sigma_{BW}(E) E dE = \frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu} \omega \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} \quad (2.62)$$

đặt
$$\gamma = \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} \quad (2.63)$$

Mặt khác theo phương trình (2.54), tiết diện phản ứng đạt cực đại tại $E = E_r$. Khi đó tiết diện cộng hưởng được xác định bởi công thức:

$$\sigma_r = \sigma(E = E_r) = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu E} \frac{\omega\Gamma_a\Gamma_b}{\Gamma^2} \quad (2.64)$$

Từ các công thức (2.54), (2.60), (2.63) và (2.64) ta suy ra tốc độ phản ứng cho một cặp hạt:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{2\pi}{\mu kT} \right)^{3/2} \hbar^2 (\omega\gamma)_r \exp\left(-\frac{E_r}{kT}\right) \quad (2.65)$$

Khi phản ứng có nhiều kênh cộng hưởng hẹp, công thức (2.65) được viết lại:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{2\pi}{\mu kT} \right)^{3/2} \hbar^2 \sum_i (\omega\gamma)_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) \quad (2.66)$$

CHƯƠNG 3

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TỐC ĐỘ PHẢN ỨNG CHO PHẢN ỨNG BA ALPHA

Trong chương này chúng ta sẽ đi tìm hiểu hai phương pháp được sử dụng để tính tốc độ phản ứng ba alpha. Đầu tiên chúng ta sẽ tìm hiểu về áp dụng phương pháp CDCC (9) để giải bài toán phản ứng trực tiếp ba alpha. Ở phần kế tiếp sẽ là giải lại bài toán tính tốc độ phản ứng ba alpha dựa theo cách tính của Fowler.

3.1. Áp dụng phương pháp CDCC để giải bài toán ba alpha.

Phương pháp CDCC (continuum discretized coupled channels) đòi hỏi những hệ thống và kỹ thuật tính toán phức tạp và chương trình máy tính chuẩn nhất hiện nay. Với những khó khăn như trên nên trong phần này chỉ tóm tắt những nét chính của phương pháp và đưa ra những kết quả mà các nhà khoa học Nhật Bản là K. Ogata, M. Kan, and M. Kanimura [9] đã công bố trên các tạp chí khi họ tính tốc độ phản ứng trực tiếp của 3 hạt alpha.

Trong phương pháp CDCC, khi hai hạt tới liên kết yếu, trạng thái của hai hạt này được xác định bởi số sóng k và moment xung lượng l trong chuyển động tương đối của hai hạt. Trong phương pháp này các giá trị của k và l được giới hạn bởi $k \leq k_{max}$ và $l \leq l_{max}$, sự giới hạn này có thể xem là một trong những giả thiết cơ bản của phương pháp CDCC.

Để giải được bài toán này, người ta phải phân chia những kênh liên tục (được mô tả bởi hàm sóng toàn phần) thành những vùng riêng rẽ (được mô tả bởi những hàm sóng đặc trưng cho từng vùng). Với cách phân chia như thế, người ta đã xây dựng ba phương pháp để giải các phương trình CDCC. Đó là phương pháp trung bình Av (average), phương pháp trung điểm Mid (midpoint) và phương pháp giả trạng thái PS (Pseudo – state).

Trong phương pháp trung bình [11], [12], giá trị liên tục của k nằm trong khoảng $[0, k_{max}]$. Tương ứng với mỗi giá trị của l , ta chia k thành một số hữu hạn các khoảng, độ rộng mỗi khoảng là $\Delta_i = k_i - k_{i-1}$. Với cách phân chia này thì hàm

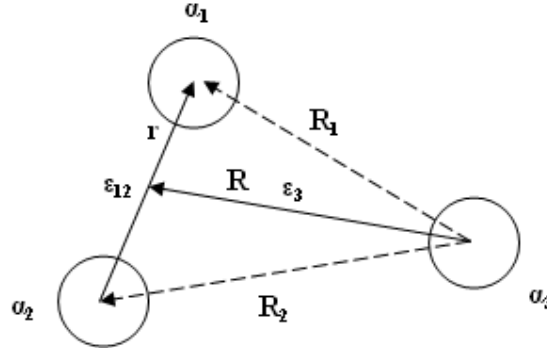
sóng toàn phần mô tả trạng thái liên tục của hệ tương tác ba hạt sẽ là một tổ hợp tuyến tính của các hàm sóng mô tả trạng thái của mỗi khoảng phân chia i .

Các hàm mô tả trạng thái liên tục trong khoảng thứ i được lấy trung bình với hàm trọng số $f_i(k)$. Trạng thái $U_i(r)$ được biểu diễn bởi:

$$\hat{u}_i(r) = \frac{1}{W} \int_{k_{i-1}}^{k_i} u(k, r) f_i(k) dk \quad (3.1)$$

trong đó trọng số $W^2 = \int_{k_{i-1}}^{k_i} |f_i(k)|^2 dk \quad (3.2)$

Trong tương tác của ba hạt alpha, năng lượng tương đối giữa α_1 và α_2 được ký hiệu là ϵ_{12} , năng lượng tương đối của hạt α_3 với khối tâm của hai hạt α_1 và α_2 được ký hiệu là ϵ_3 , năng lượng toàn phần trong hệ quy chiếu khối tâm của hệ 3 alpha là E . Với việc giải trực tiếp phương trình Schrodinger cho hệ ba hạt, ta có thể tính được tốc độ phản ứng cho hệ 3 alpha [10].



Hình 3.1. Hình vẽ mô tả hệ 3 alpha

Phương trình Schrodinger cho hệ ba hạt có dạng:

$$[T_r + T_R + v(r) + v(R_1) + v(R_2) - E]\Psi(r, R) = 0 \quad (3.3)$$

Trong phương trình trên T_r và T_R là toán tử động năng tương ứng với các vectơ tọa độ \mathbf{r} và \mathbf{R} , và v là thế tương tác (bao gồm cả thành phần lực hạt nhân và thế Coulomb) giữa hai hạt alpha tương ứng.

Hàm sóng toàn phần của hệ 3 alpha theo phương pháp CDCC [9] có dạng:

$$\Psi_{k_{i_0}, E}^{0+}(r, R) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{32\pi} \frac{1}{\hat{k}_{i_0} \hat{K}_{i_0}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \frac{\hat{u}_i(r)}{r} \frac{\hat{\chi}_i^{i_0}(R)}{R} \quad (3.4)$$

Trong đó $\hat{\chi}_i^{(i_0)}(R)$ mô tả chuyển động tương đối giữa khối tâm α_1 và α_2 so với α_3 , \hat{k}_{i_0} là số sóng tương đối giữa α_1 và α_2 , \hat{K}_{i_0} là số sóng tương đối giữa khối tâm của α_1 và α_2 với hạt α_3 , còn i_0 dùng để ký hiệu cho kênh vào của phản ứng. Những phương trình cho những kênh liên kết i theo $\hat{\chi}_i^{(i_0)}(R)$ ($i = 1 - i_{\max}$) có dạng:

$$\left[T_R + V_{ii}(R) - (E - \hat{\varepsilon}_{12,i}) \right] \hat{\chi}_i^{i_0}(R) = \sum_{i \neq i'} V_{ii'}(R) \hat{\chi}_{i'}^{i_0}(R) \quad (3.5)$$

Phương trình trên đây có thể được giải cùng với điều kiện biên (liên tục, hữu hạn ...) của $\hat{\chi}_i^{(i_0)}(R)$. Trong đó thể liên kết được xác định bởi:

$$V_{ii'}(R) = \left\langle \frac{\hat{\Phi}_i(r)}{r} | v(R_1) + v(R_2) | \frac{\hat{\Phi}_{i'}(r)}{r} \right\rangle_r \quad (3.6)$$

Xác suất dịch chuyển tứ cực điện ở trạng thái 2^+ (là trạng thái có spin bằng 2 và chẵn lẻ +) của quá trình 3 alpha được tính bởi công thức [9]:

$$\langle \sigma v \rangle_{\hat{k}_{i_0}, E} = \frac{2(2\pi)^7}{75\hbar} \left(\frac{\hbar\omega}{\hbar c} \right)^5 \sum_M \left| \left\langle \Psi_M^{2+} | O_M^{E2} | \Psi_{k_{i_0}, E}^{2+} \right\rangle \right|^2 \quad (3.7)$$

Trong đó Ψ_M^{2+} là hàm sóng mô tả trạng thái 2^+ của ^{12}C và M là hình chiếu của spin toàn phần, O_M^{E2} là toán tử dịch chuyển tứ cực điện. Tốc độ phản ứng 3 alpha được tính theo công thức [9]:

$$\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha}(T) = 3N_A^2 \frac{4}{\pi(kT)^3} \int_0^\infty \left\{ \sum_{i_0=1}^{i_{\max}} \omega_{i_0} \langle \sigma v \rangle_{\hat{k}_{i_0}, E} \right\} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE \quad (3.8)$$

$$\text{với} \quad \omega_{i_0} = \frac{2\hat{\varepsilon}_{12,i_0}}{\hat{k}_{i_0}} \sqrt{\hat{\varepsilon}_{12,i_0}(E - \hat{\varepsilon}_{12,i_0})} \quad (3.9)$$

Năng lượng $\hat{\varepsilon}_{12}$ được tính theo số sóng k [11] theo công thức:

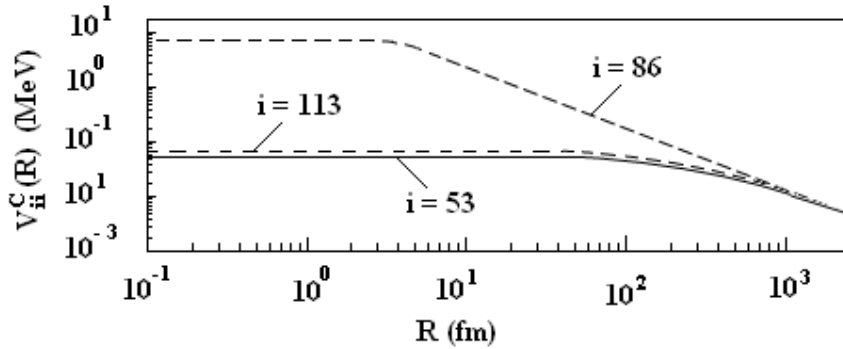
$$\hat{\varepsilon}_{12} = \frac{k^2 \hbar^2}{2\mu_{12}} \quad (3.10)$$

Thế hạt nhân $v(\text{MeV})$ [9] giữa hai hạt alpha được sử dụng có dạng hai vùng Gauss:

$$v(x) = 100. e^{-x^2} - 30,35e^{-\left(\frac{x}{3,13}\right)^2} \quad (3.11)$$

trong đó x (fm) là khoảng cách giữa hai hạt alpha.

Thế liên kết $V_{ii}^C(R)$ trong phương trình (3.5) có chứa cả thành phần Coulomb. Trong tính toán [9] người ta thấy chiều cao thế Coulomb của hệ $\alpha_1 - \alpha_2$ ở những khoảng chia không cộng hưởng thấp hơn nhiều so với những khoảng cộng hưởng. Do đó ở những vùng không cộng hưởng hạt α_3 dễ dàng tương tác với hệ $\alpha_1 - \alpha_2$. Hình vẽ 3.2 mô tả sự thay đổi độ cao thế Coulomb theo R .



Hình 3.2. Rào thế Coulomb trong tương tác ba hạt [9]

Trong hình vẽ 3.2 thì $i = 86$ ứng với vùng cộng hưởng, còn $i = 53$ và $i = 113$ ứng với những vùng không cộng hưởng. Có thể nhận thấy là $V_{ii}^C(R)$ với những vùng không cộng hưởng rất nhỏ so với những vùng cộng hưởng. Vì vậy với những phản ứng không cộng hưởng, hạt α_3 dễ dàng xuyên qua rào thế Coulomb để tương tác với hệ $\alpha_1 - \alpha_2$. Hệ quả của thế Coulomb rất thấp trong vùng không cộng hưởng là xác suất xuyên rào sẽ tăng và kết quả là tốc độ phản ứng tăng lên đáng kể.

Thế phương trình (3.11) vào (3.6), sau đó kết hợp các phương trình (3.4), (3.7), (3.8) và (3.9) các nhà khoa học Nhật Bản [9] đã tính được tốc độ phản ứng của phản ứng ba alpha trong bảng 3.1 dưới đây:

Cột 1 và 4: Nhiệt độ tính theo đơn vị mười triệu độ.

Cột 2 và 5: Tốc độ phản ứng ba alpha.

Cột 3 và 6: Tỉ số giữa tốc độ phản ứng tính bằng phương pháp CDCC so với giá trị từ NACRE [8].

Bảng 3.1. Tốc độ phản ứng 3 alpha ($\text{cm}^6\text{s}^{-1}\text{mol}^{-1}$) bằng phương pháp CDCC

$T(10^7)$	$\langle\sigma v\rangle_{\alpha\alpha\alpha}$	tỉ số CDCC/NACRE	$T(10^7)$	$\langle\sigma v\rangle_{\alpha\alpha\alpha}$	tỉ số CDCC/NACRE
1	1.08 E - 44	3.7 E 26	15	1.52 E - 16	95
1.5	3.42 E - 38	5.4 E 23	20	1.92 E - 15	1.9
2	3.12 E - 34	5.7 E 21	25	4.37 E - 14	1.0
2.5	1.73 E - 31	1.6 E 20	30	4.51 E - 13	0.99
3	2.44 E - 29	1.7 E 18	35	2.29 E - 12	0.98
4	1.10 E - 25	2.1 E 15	40	7.37 E - 12	0.98
5	3.41 E - 23	3.3 E 13	50	3.41 E - 11	0.99
6	1.63 E - 21	1.4 E 12	60	8.56 E - 11	0.99
7	2.56 E - 20	8.5 E 10	70	1.54 E - 10	0.99
8	2.01 E - 19	2.1 E 09	80	2.26 E - 10	1.0
9	9.89 E - 19	3.9 E 07	90	2.93 E - 10	1.0
10	3.52 E - 18	1.5 E 06	100	3.48 E - 10	1.0

Phương pháp này mới được xây dựng, tính toán và công bố vào năm 2009. Do đó cần có thực nghiệm kiểm chứng, đánh giá mức độ chính xác của phương pháp tính này.

3.2. Giải lại bài toán tốc độ phản ứng ba alpha theo Fowler.

Vì phương pháp CDCC được giới thiệu trong 3.1 là rất mới và cần được thực nghiệm kiểm chứng. Do đó trong luận văn này sẽ tập trung vào cách giải bài toán ba alpha dựa vào các tính toán của Fowler và của nhóm K. Nomoto, F.-K. Thielemann, and S. Miyaji [10].

Trong lòng những ngôi sao, khi nhiệt độ lên hàng triệu độ, quá trình tổng hợp ba hạt nhân ^4He thành ^{12}C là một quá trình rất đặc biệt và phải được xem xét kỹ. Quá trình này được cho là xảy ra theo hai phản ứng liên tiếp:



Theo công thức (2.7) và (2.8), tốc độ phản ứng giữa các hạt alpha để hình thành hạt nhân ${}^8\text{Be}$.

$$r_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \rho^2 N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} \frac{X_\alpha^2}{A_\alpha^2} \quad (3.12)$$

Trong đó $r_{\alpha\alpha}$ là tốc độ phản ứng sinh ${}^8\text{Be}$ từ hai hạt alpha.

X_α là độ giàu của Heli

Trong khi đó hạt nhân ${}^8\text{Be}$ ở trạng thái kích thích cũng có thể phân rã ngược trở lại thành các hạt alpha tự do. Tốc độ phân rã được tính theo công thức:

$$r_\alpha({}^8\text{Be}) = \lambda_\alpha({}^8\text{Be}) \cdot n_{{}^8\text{Be}} \quad (3.13)$$

Trong đó $r_\alpha({}^8\text{Be})$ là tốc độ phân rã của ${}^8\text{Be}$ thành các hạt alpha.

$X_{{}^8\text{Be}}$ là độ giàu của ${}^8\text{Be}$

$n_{{}^8\text{Be}}$ là mật độ hạt nhân ${}^8\text{Be}$ trong 1 cm^3 .

$$\text{Với } \lambda_\alpha({}^8\text{Be}) = \frac{\Gamma_\alpha({}^8\text{Be})}{\hbar} \text{ là hằng số phân rã của } {}^8\text{Be} \quad (3.14)$$

$\Gamma_\alpha({}^8\text{Be})$ là độ rộng phân rã ${}^8\text{Be}$ thành các hạt alpha tự do.

Theo công thức (2.8) tốc độ phân rã của hạt nhân ${}^8\text{Be}$ được viết lại:

$$r_\alpha({}^8\text{Be}) = \frac{\Gamma_\alpha({}^8\text{Be})}{\hbar} \rho N_A \frac{X_{{}^8\text{Be}}}{A_{{}^8\text{Be}}} \quad (3.15)$$

Khi xảy ra quá trình cân bằng giữa số hạt ${}^8\text{Be}$ được sinh ra và số hạt ${}^8\text{Be}$ bị phân rã thì $r_{\alpha\alpha} = r_\alpha({}^8\text{Be})$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2} \rho^2 N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} \frac{X_\alpha^2}{A_\alpha^2} = \frac{\Gamma_\alpha({}^8\text{Be})}{\hbar} \rho N_A \frac{X_{{}^8\text{Be}}}{A_{{}^8\text{Be}}} \quad (3.16)$$

Từ phương trình (3.16) ta suy ra

$$\rho N_A \frac{X_{^8Be}}{A_{^8Be}} = \frac{\hbar}{2\Gamma_\alpha(^8Be)} \rho^2 N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} \frac{X_\alpha^2}{A_\alpha^2} \quad (3.17)$$

Trong phản ứng (**), tốc độ phản ứng tổng hợp ^{12}C được xác định:

$$r_{\alpha^8Be} = \rho^2 N_A^2 \frac{X_{^8Be}}{A_{^8Be}} \frac{X_\alpha}{A_\alpha} \langle \sigma v \rangle_{\alpha^8Be} \quad (3.18)$$

Trong đó $\langle \sigma v \rangle_{\alpha^8Be}$ tốc độ phản ứng tạo hạt nhân ^{12}C từ một cặp hạt $\alpha + ^8\text{Be}$.

Tổng quát nếu coi $\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha}$ là tốc độ phản ứng hình thành ^{12}C từ ba hạt α , thì tốc độ phản ứng hình thành ^{12}C từ các hạt α [4] được tính theo công thức :

$$r_{\alpha\alpha\alpha} = \frac{1}{6} n_\alpha^3 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} = \frac{1}{6} \rho^3 N_A^3 \frac{X_\alpha^3}{A_\alpha^3} \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \quad (3.19)$$

Kết hợp các công thức (3.17), (3.18) và (3.19) ta tính được tốc độ phản ứng tổng hợp ^{12}C từ các hạt alpha ($r_{\alpha\alpha\alpha} = r_{\alpha^8Be}$):

$$\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} = 3 \frac{\hbar}{\Gamma_\alpha(^8Be)} \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} \langle \sigma v \rangle_{\alpha^8Be} \quad (3.20)$$

Như ta biết tốc độ phản ứng giữa hai hạt alpha là $\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha}$. Vậy tốc độ phản ứng trong 1 mol có $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ hạt sẽ là $N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha}$. Tương tự tốc độ phản ứng trong 1 mol giữa các hạt alpha và ^8Be sẽ là $N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha^8Be}$.

Vậy tốc độ phản ứng trong 1 mol để tạo ^{12}C từ ba hạt alpha sẽ là:

$$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} = 3 \frac{\hbar}{\Gamma_\alpha(^8Be)} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha^8Be} \quad (3.21)$$

Trong phần kế tiếp chúng ta sẽ dựa vào các số liệu thực nghiệm đã được đo từ các phòng thí nghiệm để tính tốc độ phản ứng cho phản ứng tổng hợp ^{12}C .

3.3. Lời giải số cho tốc độ phản ứng 3 alpha.

3.3.1. Tốc độ phản ứng cộng hưởng.

Đối với phản ứng cộng hưởng, tốc độ phản ứng sẽ đạt giá trị cực đại tại vùng cộng hưởng. Do đó tích phân $\langle \sigma v \rangle$ cũng đạt cực đại trong vùng cộng hưởng này.

Từ các công thức (2.41) và (2.53), nếu thay các giá trị hằng số Boltzmann $k = 0,086 \text{ MeV K}^{-1}$, tiết diện σ tính theo barn (10^{-24} cm^2) và nhiệt độ tính theo 10^9 K thì :

$$\langle \sigma v \rangle = \{2,557 \times 10^{-13} A^{-3/2} (\omega \gamma)_r\} T_9^{-3/2} \exp(-11,605 E_r/T_9) \quad (3.22)$$

$$(\omega \gamma)_r = \omega_r \gamma_r = \left(\frac{\omega \Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma} \right)_r = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma} \frac{(2J_r+1)}{(2J_1+1)(2J_2+1)} (1 + \delta_{12}) \quad (3.23)$$

Ở đây E_r là năng lượng cộng hưởng, A là số khối rút gọn của hệ các hạt tham gia tương tác, Γ độ rộng toàn phần ở mức cộng hưởng, Γ_1 và Γ_2 lần lượt là độ rộng riêng phần của kênh vào và kênh ra, J_r spin ở mức cộng hưởng, J_1 và J_2 lần lượt là spin của bia và hạt tới.

Số liệu thực nghiệm từ thí nghiệm của (Ajzenberg – Selove 1984) [10] cho kết quả:

+ Đối với phản ứng ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$:

$$E_r(\alpha\alpha) = 91,78 \text{ (keV)}, \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_\alpha({}^8\text{Be}) = 6,8 \pm 1,7 \text{ (eV)}, \quad J_1 = J_2 = J_r = 0$$

+ Đối với phản ứng ${}^4\text{He} + {}^8\text{Be}$:

$$E_r(\alpha {}^8\text{Be}) = 287,7 \text{ (keV)}, \quad \Gamma_\alpha({}^{12}\text{C}) = 8,5 \pm 1,2 \text{ (eV)}, \quad \Gamma_2 = \Gamma_{rad} = (3,7 \pm 0,5) \times 10^{-3} \text{ (eV)}, \quad J_1 = J_2 = J_r = 0.$$

Thay các giá trị này vào phương trình (3.22) và (3.23) ta được công thức tính tốc độ phản ứng cho các phản ứng cộng hưởng:

Với phản ứng ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightleftharpoons {}^8\text{Be}$

$$\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha r} = 1,229 \times 10^{-18} T_9^{-3/2} \exp(-1,065/T_9) \text{ (cm}^3\text{s}^{-1}) \quad (3.24)$$

Với phản ứng ${}^4\text{He} + {}^8\text{Be} \rightleftharpoons {}^{12}\text{C}^*$

$$\langle \sigma v \rangle_{\alpha {}^8\text{Be} r} = 2,172 \times 10^{-22} T_9^{-3/2} \exp(-3,339/T_9) \text{ (cm}^3\text{s}^{-1}) \quad (3.25)$$

trong các công thức (3.24) và (3.25) thì $\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha r}$ là tốc độ phản ứng cộng hưởng giữa hai hạt alpha và $\langle \sigma v \rangle_{\alpha {}^8\text{Be} r}$ là tốc độ phản ứng cộng hưởng giữa hạt alpha và ${}^8\text{Be}$.

3.3.2. Tốc độ phản ứng không cộng hưởng.

Như ở phần cơ sở lý thuyết ở chương 1, theo các công thức (2.26), (2.30), (2.33), (2.36), (2.37). nếu thay các giá trị hằng số Boltzmann $k = 0,086 \text{ MeV K}^{-1}$, tiết diện σ tính theo barn (10^{-24} cm^2) và nhiệt độ tính theo 10^9 K , công thức tính tốc độ phản ứng không cộng hưởng:

$$\langle \sigma v \rangle = \{1,3006 \times 10^{-14} (Z_1 Z_2 / A)^{1/3} S_{eff}\} T_9^{-2/3} \exp(-\tau) \quad (3.26)$$

$$E_G^{1/2} = 0,98948 Z_1 Z_2 A^{1/2} (\text{MeV}^{1/2}) \quad (3.27)$$

$$S_{eff} = S(0) \left[1 + \frac{5}{12\tau} + \frac{S'(0)}{S(0)} \left(E_0 + \frac{35}{36} kT \right) + \frac{1}{2} \frac{S''(0)}{S(0)} \left(E_0^2 + \frac{89}{36} E_0 kT \right) \right] (\text{MeV} \cdot \text{barn}) \quad (3.28)$$

$$\tau = 4,2487 (Z_1^2 Z_2^2 A)^{-1/3} T_9^{-1/3} \quad (3.29)$$

$$E_0 = 0,12204 (Z_1^2 Z_2^2 A)^{1/3} T_9^{2/3} (\text{MeV}) \quad (3.30)$$

Với phản ứng ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightleftharpoons {}^8\text{Be}$ có $Z_1 = Z_2 = 2$; $A = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} = 2$, thế các

giá trị này vào các biểu thức (3.26) đến (3.30) ta tính được:

$$\tau = 13,489 T_9^{-1/3}$$

$$E_0 = 0,3874 T_9^{2/3} (\text{MeV})$$

$$\begin{aligned} \text{vậy } S_{eff} = S(0) & \left(1 + 0,031 T_9^{1/3} + 0,3874 \frac{S'(0)}{S(0)} T_9^{2/3} + 0,0838 \frac{S'(0)}{S(0)} T_9 \right. \\ & \left. + 0,075 \frac{S''(0)}{S(0)} T_9^{4/3} + 0,04125 \frac{S''(0)}{S(0)} T_9^{5/3} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

và

$$\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha nr} = 1,6386 \times 10^{-14} \times T_9^{-2/3} \times S_{eff} \times \exp(-13,489 T_9^{-1/3}) \quad (3.32)$$

Trong công thức (3.32) thì $\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha nr}$ là tốc độ phản ứng của phản ứng không cộng hưởng cho một cặp hạt alpha.

Với phản ứng ${}^4\text{He} + {}^8\text{Be} \rightleftharpoons {}^{12}\text{C}^*$ có $Z_1 = 2, Z_2 = 4$; $A = 8/3$, thế các giá trị này vào các biểu thức (3.26) đến (3.30) ta tính được:

$$\tau = 23,567 T_9^{-1/3}$$

$$E_0 = 0,6767 T_9^{2/3} (\text{MeV})$$

$$\begin{aligned} \text{vậy } S_{eff} = S(0) & \left(1 + 0,018T_9^{1/3} + 0,6767 \frac{S'(0)}{S(0)} T_9^{2/3} + \right. \\ & \left. + 0,0838 \frac{S'(0)}{S(0)} T_9 + 0,229 \frac{S''(0)}{S(0)} T_9^{4/3} + 0,072 \frac{S''(0)}{S(0)} T_9^{5/3} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

và

$$\langle \sigma v \rangle_{\alpha \text{ } ^8\text{Be} nr} = 1,8758 \times 10^{-14} \times T_9^{-2/3} \times S_{eff} \times \exp(-23,567T_9^{-1/3}) \quad (3.34)$$

Trong công thức (3.34) thì $\langle \sigma v \rangle_{\alpha \text{ } ^8\text{Be} nr}$ là tốc độ phản ứng của phản ứng không cộng hưởng cho một cặp hạt α và ^8Be .

Theo [10] các công thức (3.32) và (3.34) là những hàm chỉ theo một biến T_9 như sau:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha nr} = 6,914 \times 10^{-15} \times T_9^{-2/3} \times \exp(-13,489T_9^{-1/3}) \\ \times \left(1 + 0,031T_9^{1/3} + 8,009T_9^{2/3} + \right. \\ \left. + 1,732T_9 + 49,883T_9^{4/3} + 27,426T_9^{5/3} \right) \text{ (cm}^3\text{s}^{-1}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle_{\alpha \text{ } ^8\text{Be} nr} = 4,168 \times 10^{-17} \times T_9^{-2/3} \times \exp(-23,567T_9^{-1/3}) \\ \times \left(1 + 0,018T_9^{1/3} + 5,249T_9^{2/3} + \right. \\ \left. + 0,650T_9 + 19,176T_9^{4/3} + 6,034T_9^{5/3} \right) \text{ (cm}^3\text{s}^{-1}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Trong khai triển chuỗi Maclaurin của $S(E)$, người ta chỉ lấy tới bậc 2 và bỏ qua các số hạng bậc cao hơn. Chuỗi này sẽ phân kỳ nếu năng lượng tương tác giữa các hạt càng cao và vì vậy S_{eff} cũng phân kỳ khi năng lượng tăng cao. Có thể minh họa về sự khác biệt giữa giá trị $S(E)$ ở trên và giá trị thực của nó [5] như sau: Khi năng lượng E nhỏ hơn giá trị năng lượng cộng hưởng E_r (năng lượng tại mức cộng hưởng), giá trị của $S(E)$ nhỏ hơn giá trị thực của nó, tại giá trị cộng hưởng giá trị này vẫn nhỏ hơn giá trị thực một chút và nó chỉ bằng với giá trị thực khi năng lượng hạt khoảng $\frac{4}{3}E_r$ [6] và giá trị $S(E)$ tiếp tục tăng trong khi giá trị thực của nó giảm. Vì vậy chúng ta cần một hệ số bổ chính để giá trị $S(E)$ nhận giá trị phù hợp trong toàn dải năng lượng và hệ số này có liên quan tới giá trị năng lượng cộng hưởng E_r . Theo Fowler [5] hệ số này phải có dạng:

$$f = \exp \left[- \left(\frac{T_9}{T_{9co}} \right)^2 \right] \quad (3.37)$$

$$\text{trong đó} \quad T_{9co} = \frac{23,46}{(Z_1^2 Z_2^2 A \ln 4)^{1/2}} E_{6r}^{3/2} \quad (3.38)$$

Vậy tốc độ phản ứng không cộng hưởng xét cho một mol (3.35); (3.36) được viết lại:

$$\begin{aligned} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha \alpha nr} &= 4,164 \times 10^9 \times T_9^{-2/3} \times \exp \left(-13,489 T_9^{-1/3} - \left(\frac{T_9}{0,098} \right)^2 \right) \\ &\times \left(1 + 0,031 T_9^{1/3} + 8,009 T_9^{2/3} + 1,732 T_9 + \right. \\ &\left. + 49,883 T_9^{4/3} + 27,426 T_9^{5/3} \right) \text{ (cm}^3 \text{s}^{-1} \text{mol}^{-1}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha \text{ } ^8\text{Be} nr} &= 2,510 \times 10^7 \times T_9^{-2/3} \times \exp \left(-23,567 T_9^{-1/3} - \left(\frac{T_9}{0,235} \right)^2 \right) \\ &\times \left(1 + 0,018 T_9^{1/3} + 5,249 T_9^{2/3} + 0,650 T_9 + \right. \\ &\left. + 19,176 T_9^{4/3} + 6,034 T_9^{5/3} \right) \text{ (cm}^3 \text{s}^{-1} \text{mol}^{-1}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.3.3. Tốc độ phản ứng toàn phần.

Tốc độ phản ứng toàn phần trên một mol là tổng của hai thành phần cộng hưởng và không cộng hưởng được biểu diễn bởi biểu thức dưới đây:

$$N_A \langle \sigma v \rangle = N_A \langle \sigma v \rangle_r + N_A \langle \sigma v \rangle_{nr} \quad (3.41)$$

Từ công thức (3.24) và (3.39), tốc độ phản ứng toàn phần tạo ^8Be :

$$\begin{aligned} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha \alpha t} &= 7,402 \times 10^5 T_9^{-3/2} \exp(-1,065/T_9) + 4,164 \times 10^9 \times \\ &\times T_9^{-2/3} \times \exp \left(-13,489 T_9^{-1/3} - \left(\frac{T_9}{0,098} \right)^2 \right) \\ &\times \left(1 + 0,031 T_9^{1/3} + 8,009 T_9^{2/3} + 1,732 T_9 + \right. \\ &\left. + 49,883 T_9^{4/3} + 27,426 T_9^{5/3} \right) \text{ (cm}^3 \text{s}^{-1} \text{mol}^{-1}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Từ công thức (3.25) và (3.40), tốc độ phản ứng toàn phần tạo ^{12}C :

$$\begin{aligned} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha \text{ } ^8\text{Be} t} &= 1,308 \times 10^2 T_9^{-3/2} \exp(-3,339/T_9) + 2,510 \times 10^7 \times \\ &\times T_9^{-2/3} \times \exp \left(-23,567 T_9^{-1/3} - \left(\frac{T_9}{0,235} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(1 + 0,018T_9^{\frac{1}{3}} + 5,249T_9^{\frac{2}{3}} + 0,650T_9 + \right. \\ & \left. + 19,176T_9^{\frac{4}{3}} + 6,034T_9^{\frac{5}{3}} \right) (\text{cm}^3\text{s}^{-1}\text{mol}^{-1}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Trong phương trình (3.42) và (3.43) đại lượng $N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha t}$ là tốc độ phản ứng toàn phần giữa các hạt alpha, còn $N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha \text{ } ^8\text{Be} t}$ là tốc độ phản ứng toàn phần giữa các hạt alpha và ^8Be .

Thay các phương trình (3.42) và (3.43) vào phương trình (3.21) ta suy ra tốc độ phản ứng toàn phần:

$$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} = 2,904 \times 10^{-16} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha \text{ } ^8\text{Be} t} (\text{cm}^6\text{s}^{-1}\text{mol}^{-2}) \quad (3.44)$$

Ở nhiệt độ $T_9 > 4$, do ảnh hưởng bởi các trạng thái cộng hưởng ta phải bổ sung thêm một thành phần cộng hưởng:

$$\Delta N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} = 2,812 \times 10^{-8} T_9^{-3} \exp(-4.404/T_9) (\text{cm}^6\text{s}^{-1}\text{mol}^{-2}) \quad (3.45)$$

trong đó $4.404 = E_{r3\alpha} / k$.

Vậy tốc độ phản ứng toàn phần là

$$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha t} = 2,904 \times 10^{-16} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha \text{ } ^8\text{Be} t} (\text{cm}^6\text{s}^{-1}\text{mol}^{-2}) \quad \text{với } T_9 < 4$$

$$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha t} = N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} + \Delta N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} (\text{cm}^6\text{s}^{-1}\text{mol}^{-2}) \quad T_9 > 4$$

Tương ứng với mỗi giá trị của T_9 ta có tốc độ phản ứng toàn phần tương ứng được ghi nhận trong bảng 3.2 sau:

Trong đó:

- Cột 1 T_9 là nhiệt độ tính theo đơn vị tỉ độ.
- Cột 2 là tốc độ phản ứng toàn phần $^4\text{He} + ^4\text{He}$.
- Cột 3 là tốc độ phản ứng toàn phần $^4\text{He} + ^8\text{Be}$.
- Cột 4 là tốc độ phản ứng của ba alpha.

Bảng 3.2. Tốc độ phản ứng toàn phần được tối tính lại theo Fowler ($\text{cm}^6\text{s}^{-1}\text{mol}^{-2}$)

T_9	$N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha t}$	$N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha \text{ } ^8\text{Be} t}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha t}$
0.01	8.66278E-17	2.18169E-39	5.48842E-71
0.011	5.90986E-16	6.37054E-38	1.09333E-68
0.012	3.23713E-15	1.26408E-36	1.18831E-66
0.013	1.48251E-14	1.8305E-35	7.88071E-65
0.014	5.85303E-14	2.04161E-34	3.47017E-63
0.015	2.03971E-13	1.82837E-33	1.083E-61
0.016	6.39193E-13	1.3585E-32	2.52167E-60
0.017	1.82822E-12	8.59685E-32	4.56419E-59
0.018	4.83046E-12	4.73285E-31	6.63908E-58
0.02	2.761E-11	1.00975E-29	8.09608E-56
0.025	9.12783E-10	4.67678E-27	1.23968E-51
0.03	1.60263E-08	5.08256E-25	2.36544E-48
0.04	1.79393E-05	4.77227E-22	2.48615E-42
0.05	0.003073344	6.26361E-20	5.59026E-38
0.06	0.09452338	2.60151E-18	7.14103E-35
0.07	1.076360588	6.44471E-17	2.01446E-32
0.08	6.594302431	4.91287E-15	9.40808E-30
0.09	26.75680086	3.78738E-13	2.94286E-27
0.1	81.43857829	1.3075E-11	3.09221E-25
0.11	201.2344747	2.35478E-10	1.3761E-23
0.12	425.5010003	2.59226E-09	3.20314E-22
0.13	798.3816558	1.95454E-08	4.53161E-21
0.14	1364.218237	1.09525E-07	4.33904E-20
0.15	2163.485642	4.84271E-07	3.04256E-19
0.16	3229.85455	1.76707E-06	1.65742E-18
0.18	6255.64612	1.50502E-05	2.73407E-17
0.2	10537.06878	8.21334E-05	2.51325E-16
0.25	26340.85612	0.001656772	1.26733E-14
0.3	47444.92258	0.011674277	1.60848E-13
0.35	71089.86145	0.045429487	9.37869E-13
0.4	95133.47536	0.122530966	3.38513E-12
0.45	118225.3108	0.259612101	8.91317E-12
0.5	139633.138	0.465516321	1.88764E-11
0.6	176350.0316	1.07778552	5.51956E-11
0.7	205054.3661	1.893982966	1.12782E-10
0.8	226882.6192	2.814078313	1.8541E-10
0.9	243186.2062	3.749828909	2.64818E-10
1	255167.5581	4.639791543	3.43812E-10
1.25	272096.8455	6.473740764	5.11535E-10
1.5	277719.1491	7.686547914	6.19917E-10

1.75	277347.6572	8.383334584	6.75209E-10
2	273779.2979	8.709798604	6.92477E-10
2.5	262449.8279	8.702700164	6.6328E-10
3	249513.3018	8.270963486	5.99303E-10
3.5	236857.6655	7.694647723	5.29265E-10
4	225084.1155	7.095621455	4.63801E-10
5	204580.5554	5.999718613	3.56444E-10
6	187712.9824	5.101477661	2.78091E-10
7	173730.3058	4.383310301	2.21144E-10
8	161984.566	3.808106662	1.79135E-10
9	151983.3084	3.342879539	1.47541E-10
10	143360.6798	2.962080223	1.23317E-10

Bảng 3.3. Tốc độ phản ứng toàn phần lấy từ NACRE ($\text{cm}^6\text{s}^{-1}\text{mol}^{-2}$):

T_9	Giới hạn dưới của $N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{aaa}$	Giá trị chấp nhận của $N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{aaa}$	Giới hạn trên của $N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{aaa t}$
0.01	2.13 E -71	2.93 E -71	3.89 E -71
0.011	4.32 E -69	5.94 E -69	7.90 E -69
0.012	4.79 E -67	6.59 E -67	8.75 E -67
0.013	3.24 E -65	4.46 E -65	5.92 E -65
0.014	1.46 E -63	2.01 E -63	2.66 E -63
0.015	4.65 E -62	6.40 E -62	8.50 E -62
0.016	1.11 E -60	1.53 E -60	2.03 E -60
0.018	3.07 E -58	4.22 E -58	5.61 E -58
0.02	3.96 E -56	5.45 E -56	7.23 E -56
0.025	0.81 E -51	1.11 E -51	1.47 E -51
0.03	1.10 E -47	1.46 E -47	1.86 E -47
0.04	4.04 E -41	5.31 E -41	6.67 E -41
0.05	0.79 E -36	1.04 E -36	1.32 E -36
0.06	0.91 E -33	1.20 E -33	1.52 E -33
0.07	2.33 E -31	3.00 E -31	3.75 E -31
0.08	8.18 E -29	9.68 E -29	11.2 E -29
0.09	2.18 E -26	2.52 E -26	2.87 E -26
0.1	2.05 E -24	2.38 E -24	2.70 E -24
0.11	8.34 E -23	9.64 E -23	10.9 E -23
0.12	1.79 E -21	2.07 E -21	2.35 E -21
0.13	2.35 E -20	2.72 E -20	3.09 E -20
0.14	2.10 E -19	2.43 E -19	2.76 E -19
0.15	1.38 E -18	1.60 E -18	1.82 E -18
0.16	7.11 E -18	8.22 E -18	9.34 E -18
0.18	1.05 E -16	1.22 E -16	1.38 E -16
0.2	0.88 E -15	1.02 E -15	1.16 E -15
0.25	3.65 E -14	4.22 E -14	4.79 E -14
0.3	3.95 E -13	4.57 E -13	5.18 E -13
0.35	2.01 E -12	2.33 E -12	2.64 E -12
0.4	6.48 E -12	7.49 E -12	8.50 E -12
0.45	1.54 E -11	1.78 E -11	2.02 E -11
0.5	2.98 E -11	3.45 E -11	3.91 E -11
0.6	7.46 E -11	8.62 E -11	9.79 E -11
0.7	1.34 E -10	1.55 E -10	1.75 E -10
0.8	1.96 E -10	2.27 E -10	2.58 E -10
0.9	2.54 E -10	2.93 E -10	3.33 E -10
1	3.01 E -10	3.48 E -10	3.95 E -10
1.25	3.71 E -10	4.30 E -10	4.89 E -10
1.5	3.87 E -10	4.49 E -10	5.12 E -10

1.75	3.72 E -10	4.37 E -10	5.02 E -10
2	3.44 E -10	4.16 E -10	4.87 E -10
2.5	2.86 E -10	3.92 E -10	4.99 E -10
3	2.45 E -10	4.16 E -10	5.90 E -10
3.5	2.22 E -10	4.77 E -10	7.39 E -10
4	2.11 E -10	5.55 E -10	9.10 E -10
5	2.05 E -10	7.04 E -10	12.2 E -10
6	2.05 E -10	8.03 E -10	14.3 E -10
7	2.01 E -10	8.48 E -10	15.3 E -10
8	1.94 E -10	8.52 E -10	15.5 E -10
9	1.84 E -10	8.28 E -10	15.1 E -10
10	1.73 E -10	7.90 E -10	14.5 E -10

Các số liệu trong các bảng 3.2 và 3.3 có một số chênh lệch nguyên nhân là do các công thức được tính theo các số liệu thực nghiệm khác nhau. Cụ thể là trong bài toán ba alpha, khi tính lại tốc độ phản ứng ba alpha tôi đã dựa vào số liệu thực nghiệm của Ajzenberg – Selove 1984 với trạng thái cộng hưởng của ^8Be ở mức $E_r = 91,78 \text{ keV}$ và độ rộng $\Gamma = 6,8 \text{ eV}$, của ^{12}C là $E_r = 287,7 \text{ keV}$, độ rộng $\Gamma = 8,5 \text{ eV}$, độ rộng trong phân rã γ của ^{12}C là $\Gamma_\gamma = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$. Trong khi đó các số liệu trong NACRE là sự tổng hợp các tính toán từ số liệu thực nghiệm của S. Wustenbecker, H. W. Becker, H. Ebbing, W.H. Schlte, ... (WÜ92) trạng thái cộng hưởng của ^8Be ở mức $E_r = 92,03 \text{ keV}$ và độ rộng $\Gamma = 5,57 \text{ eV}$, của ^{12}C là $E_r = 287,7 \text{ keV}$, độ rộng $\Gamma = 8,3 \text{ eV}$, độ rộng trong phân rã γ của ^{12}C là $\Gamma_\gamma = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ và theo số liệu thực nghiệm của J.Benn, E. B. Dally, H. H. Muller, R. E. Pixly, H. H. Staub và H. Winkler năm 1986 (BE68) thì trạng thái cộng hưởng của ^8Be ở mức $E_r = 92,12 \text{ keV}$ và độ rộng $\Gamma = 6,8 \text{ eV}$, của ^{12}C là $E_r = 287,7 \text{ keV}$, độ rộng $\Gamma = 8,3 \text{ eV}$, độ rộng trong phân rã γ của ^{12}C là $\Gamma_\gamma = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$.

CHƯƠNG 4

TỐC ĐỘ PHẢN ỨNG CHO PHÂN BỐ LÉVY

4.1. Hiệu chỉnh phân bố Maxwell – Boltzmann.

Trong luận văn của Nguyễn Hoàng Phúc chúng tôi đã đề cập khả năng Φ_{Levy} giải thích vấn đề thông lượng hẹp từ mặt trời. Hàm phân bố Maxwell-Boltzmann đã được hiệu chỉnh để mô tả các proton năng lượng cao từ mặt trời. Việc hiệu chỉnh như vậy dẫn đến khả năng xảy ra các phản ứng $p + p \rightarrow D + \pi^+$, chính π^+ phân rã sinh ra các neutrino, các neutrino này có thể giải thích việc giá trị thực nghiệm của các thí nghiệm đo thông lượng hẹp lớn hơn giá trị lý thuyết. Trong khi nếu xét đến quá trình Oscillation thì giá trị thực nghiệm phải thấp hơn giá trị lý thuyết. Chúng tôi hiệu chỉnh hàm phân bố Maxwell-Boltzmann theo công thức sau.

$$\Phi(E) = \Phi_{MB}(E) + \Phi_{Levy}(E) \quad (4.1).$$

trong đó
$$\Phi(E)_{MB} = \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{1/2}} \frac{E}{kT} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \quad (4.2)$$

$$\Phi(E)_{Levy} = B \left(\frac{8\mu}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{1/2}} \exp\left(-\left(\frac{E}{kT}\right)^\alpha\right) \quad (4.3)$$

Trong đó α là hệ số $0 \leq \alpha \leq 1$.

Đặc điểm của hàm phân bố $\Phi(E)_{MB}$ là với điều kiện nhiệt độ cho trước thì $\Phi(E)_{MB}$ có giá trị cực đại tại $E=kT$, khi E tăng ($E>kT$) thì $\Phi(E)_{MB}$ giảm rất nhanh theo hàm số mũ, có nghĩa là xác suất tồn tại các hạt năng lượng $E \gg kT$ rất thấp gần như bằng 0. Còn $\Phi(E)_{Levy}$ giảm chậm hơn so với $\Phi(E)_{MB}$, do đó khi năng lượng trong vùng $E \gg kT$, thì mặc dù xác suất xuất hiện các hạt năng lượng cao nhỏ nhưng vẫn đủ để xảy ra các phản ứng $p + p \rightarrow D + \pi^+$.

Vậy vấn đề đặt ra là đối với các phản ứng các hạt mạng điện có Z lớn, lúc này thế Coulomb $V_{Coulomb} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$ sẽ lớn, vì vậy các hạt mang điện này muốn

xuyên rào thế Coulomb để tương tác hạt nhân thì phải có năng lượng tương đối cao so với giá trị $kT = 1,3 \text{ keV}$. Trong khi như chúng ta biết nếu vẫn dùng hàm phân bố Maxwell-Boltzmann, ở nhiệt độ thấp (T khoảng vài triệu độ) thì xác suất xuất hiện các hạt năng lượng cao (E lớn hơn vài chục keV) gần như bằng 0, dẫn đến tốc độ phản ứng rất nhỏ. Còn nếu sử dụng hàm phân bố đã được hiệu chỉnh thì mặc dù xác suất xuất hiện các hạt năng lượng cao nhỏ nhưng vẫn lớn hơn nhiều so với hàm phân bố Maxwell-Boltzmann. Lúc này hàm phân bố được hiệu chỉnh chủ yếu do $\Phi(E)_{Levy}$ đóng góp và tốc độ phản ứng cũng sẽ thay đổi rất nhiều (tăng). Chúng ta sẽ khảo sát sự thay đổi này cho trường hợp phản ứng hình thành ^{12}C .

Như vậy tốc độ phản ứng toàn phần sẽ là tổng của tốc độ phản ứng tính theo phân bố Maxwell Boltzmann và tốc độ phản ứng tính theo phân bố Lévy.

$$N_A \langle \sigma v \rangle = N_A \langle \sigma v \rangle_{MB} + N_A \langle \sigma v \rangle_{Levy} \quad (4.4)$$

Vì vậy trong luận văn này sẽ tính tốc độ phản ứng cho phản ứng ba alpha khi áp dụng phân bố mới này.

Từ công thức (4.3) phân bố Lévy có dạng:

$$\Phi(E)_{Levy} = B \left(\frac{8\mu}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{1/2}} \exp \left(- \left(\frac{E}{kT} \right)^\alpha \right)$$

trong đó hệ số $B = 10^{-17} \rightarrow 10^{-39}$ và $\alpha = 0.1 \rightarrow 0.34$, các số liệu này được chúng tôi xác định và trình bày trong luận văn của Nguyễn Hoàng Phúc. Trong luận văn này sẽ tính cho một vài giá trị cụ thể của α và B.

Dưới đây là những tính toán cụ thể cho phản ứng 3 alpha.

4.2. Tốc độ phản ứng cho phổ Lévy.

$$\text{Phân bố Lévy: } \Phi(E)_{Levy} = B \left(\frac{8\mu}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{1/2}} \exp \left(- \left(\frac{E}{kT} \right)^\alpha \right)$$

$$\text{hay} \quad \Phi(E)_{Levy} = BkT\mu \left(\frac{8}{\pi\mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \exp \left(- \left(\frac{E}{kT} \right)^\alpha \right) \quad (4.5)$$

Công thức (4.5) được biến đổi cho xuất hiện hệ số giống với hệ số của phân bố Maxwell Boltzmann để tiện cho các tính toán sau này.

4.2.1. Tốc độ phản ứng cộng hưởng cho phổ Levy.

Theo các công thức (3.26) và (3.27) cho phân bố Maxwell – Boltzmann:

$$\langle \sigma v \rangle_r = \{2,557 \times 10^{-13} A^{-3/2} (\omega \gamma)_r\} T_9^{-3/2} \exp(-11,605 E_r / T_9)$$

$$(\omega \gamma)_r = \omega_r \gamma_r = \left(\frac{\omega \Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma} \right)_r = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_r} \frac{(2J_r + 1)}{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)} (1 + \delta_{12})$$

Tương tự đối với phân bố Lévy, chúng ta có biểu thức:

$$\langle \sigma v \rangle_r = B k \mu \{2,557 \times 10^{-13} A^{-3/2} (\omega \gamma)_r\} T_9^{-1/2} E_r \exp(-11,605^\alpha E_r^\alpha / T_9^\alpha) \quad (4.6)$$

với
$$(\omega \gamma)_r = \omega_r \gamma_r = \left(\frac{\omega \Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma} \right)_r = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_r} \frac{(2J_r + 1)}{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)} (1 + \delta_{12})$$

+ Với phản ứng $\alpha + \alpha$: $A = 2, E_r(\alpha\alpha) = 91,78 \text{ keV}, \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_\alpha(^8\text{Be}) = 6,8 \pm 1,7 \text{ eV}, J_1 = J_2 = J_r = 0$ [10]. Thay các giá trị này vào công thức (4.6), tốc độ phản ứng cộng hưởng theo phân bố Lévy được tính theo công thức:

$$N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha r} = N_A B \times 2,012 \times 10^{-38} T_9^{-1/2} \exp\left(-\frac{1,065^\alpha}{T_9^\alpha}\right) \quad (4.7)$$

trong công thức (4.7) $\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha r}$ là tốc độ phản ứng cộng hưởng giữa các hạt alpha trong 1 cm^3 trong một giây.

+ Với phản ứng $\alpha + ^8\text{Be}$ [10]: $A = \frac{8}{3}, E_r(\alpha ^8\text{Be}) = 287,7 \text{ keV}, \Gamma_\alpha(^{12}\text{C}) = 8,5 \pm 1,2 \text{ eV}, \Gamma_2 = \Gamma_{rad} = (3,7 \pm 0,5) \times 10^{-3} \text{ eV}, J_1 = J_2 = J_r = 0$. Thay các giá trị này vào công thức (4.6), tốc độ phản ứng cộng hưởng theo phân bố Lévy được tính theo công thức:

$$N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha ^8\text{Be} r} = N_A B \times 1,485 \times 10^{-41} T_9^{-1/2} \exp\left(-\frac{3,339^\alpha}{T_9^\alpha}\right) \quad (4.8)$$

trong công thức (4.8) $\langle \sigma v \rangle_{\alpha ^8\text{Be} r}$ là tốc độ phản ứng cộng hưởng giữa các hạt alpha và ^8Be trong 1 cm^3 trong một đơn vị thời gian.

4.2.2. Tốc độ phản ứng không cộng hưởng cho phổ Levy.

Tốc độ phản ứng theo phân bố Maxwell - Boltzmann [2] được xác định theo công thức:

$$\langle \sigma v \rangle = B \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int S(E) \exp \left(- \left(\frac{E_G}{E} \right)^{1/2} - \frac{E}{kT} \right) dE$$

trong đó $S(E) = S(0) \left(1 + \frac{S'(0)}{S(0)} E + \frac{1}{2} \frac{S''(0)}{S(0)} E^2 \right)$

Tương tự cho phân bố Lévy:

$$\langle \sigma v \rangle = B \left(\frac{8\mu}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{1/2}} \int \frac{1}{E} S(E) \exp \left(- \left(\frac{E_G}{E} \right)^{1/2} - \frac{E}{kT} \right) dE \quad (4.9)$$

$$S(E) = S(0) \left(1 + \frac{S'(0)}{S(0)} E + \frac{1}{2} \frac{S''(0)}{S(0)} E^2 \right) \quad (4.10)$$

Trong bài báo Fowler 1975 [5], như đã nói ở trên, do sự phân kỳ của $S(E)$ ở nhiệt độ cao, nên ta phải đưa vào hệ số Cutoff $f = \exp \left(- \frac{T_9^2}{T_{9co}^2} \right)$. Hệ số này không phụ thuộc vào dạng phân bố [5], vì nó chỉ phụ thuộc vào tiết diện tán xạ.

trong đó $T_{9co} = \frac{19.92}{(Z_1^2 Z_2^2 A)^{1/2}} E_r^{3/2}$, ta suy ra

$$\langle \sigma v \rangle = B \left(\frac{8\mu}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{1/2}} \int \frac{1}{E} S(E) \exp \left(- \left(\frac{E_G}{E} \right)^{1/2} - \frac{E}{kT} - \left(\frac{T_9}{T_{9co}} \right)^2 \right) dE \quad (4.11)$$

Muốn tính được tốc độ phản ứng chúng ta phải xác định được các giá trị $S(0)$; $\frac{S'(0)}{S(0)}$; $\frac{S''(0)}{S(0)}$ của $S(E)$ từ thực nghiệm. Tuy nhiên số liệu về các đại lượng này cho phản ứng ba alpha không tìm thấy ở dạng tường minh trong các bảng số liệu của Fowler, NACRE ...

Từ biểu công thức (2.47):

$$S_{eff}(E_0) = S(0) \left[1 + \frac{5}{12\tau} + \frac{S'(0)}{S(0)} \left(E_0 + \frac{35}{36} kT \right) + \frac{1}{2} \frac{S''(0)}{S(0)} \left(E_0^2 + \frac{89}{36E_0} kT \right) \right] \quad (4.12)$$

và các công thức (2.38) và công thức (2.34) cho:

$$\tau = 4,2487 (Z_1^2 Z_2^2 A)^{-1/3} T_9^{-1/3}$$

và $E_0 = 0,12204 (Z_1^2 Z_2^2 A)^{1/3} T_9^{2/3} (\text{MeV})$

Vậy

$$S_{eff}(E_0) = S(0) \left[1 + 0,098(Z_1^2 Z_2^2 A)^{-1/3} T_9^{1/3} + 0,122(Z_1^2 Z_2^2 A)^{1/3} \frac{S'(0)}{S(0)} T_9^{2/3} + \right. \\ \left. + \frac{35 S'(0)}{36 S(0)} kT_9 + \frac{1}{2} \left(0,122(Z_1^2 Z_2^2 A)^{1/3} \right)^2 \frac{S'(0)}{S(0)} T_9^{4/3} + \right. \\ \left. + \frac{89}{72} 0,122(Z_1^2 Z_2^2 A)^{1/3} \frac{S''(0)}{S(0)} kT_9^{5/3} \right] \quad (4.13)$$

Trong [10] tác giả của bài báo đã đưa ra biểu thức tường minh cho $S_{eff}(E)$:

+ Với phản ứng $\alpha + \alpha$

$$S_{eff}(E) = S(0) \left(1 + 0,031 T_9^{1/3} + 8,009 T_9^{2/3} + 1,732 T_9 + 49,883 T_9^{4/3} + 27,426 T_9^{5/3} \right) \quad (4.14)$$

Mặt khác hệ số của hàm exp trong công thức (2.35) có chứa thành phần $S(0)$. Do đó để nếu lấy hệ của hàm exp trong phương trình (3.35) chia cho hệ số của phương trình (3.32) ta sẽ được thành phần $S(0)$ cho phản ứng $\alpha + \alpha$.

$$S(0) = \frac{6,914 \times 10^{-15}}{1,638 \times 10^{-14}} = 0,422$$

Đồng nhất hệ số hai công thức (4.13) và (4.14) ta có thể xác định được :

$$\frac{S'(0)}{S(0)} = 20,68; \quad \frac{S''(0)}{S(0)} = 665.$$

Với phản ứng $\alpha + \alpha$ ta có $Z_1 = Z_2 = 2$; $A = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} = 4$; thì

$E_G^{1/2} = 5,5973 \text{ MeV}^{1/2}$, và như vậy tốc độ phản ứng không cộng hưởng cho phản ứng $\alpha + \alpha$ được xác định bởi công thức sau:

$$N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha nr} = N_A B \times 3,3 \times 10^{-9} T_9^{-1/2} \times \\ \times \int_0^\infty \left(20,68 + \frac{1}{E} + 665E \right) \exp \left(-\frac{11,605^\alpha E^\alpha}{T_9^\alpha} - \frac{5,597}{E^{1/2}} - \left(\frac{T_9}{0,098} \right)^2 \right) dE \quad (4.15)$$

trong công thức trên $\langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha nr}$ là tốc độ phản ứng trung bình của phản ứng không cộng hưởng của một cặp hạt alpha.

$$+ \text{ Với phản ứng } \alpha + {}^8\text{Be} \text{ có } Z_1 = 2; Z_2 = 4; A = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{8}{3}$$

Theo [10] dạng tường minh của $S_{eff}(E)$ cho phản ứng $\alpha + {}^8\text{Be}$ có dạng:

$$S_{eff}(E) = S(0) \left(1 + 0,018T_9^{1/3} + 5,249T_9^{2/3} + 0,650T_9 + 19,176T_9^{4/3} + 6,034T_9^{5/3} \right) \quad (4.16)$$

Hệ số của hàm exp trong phương trình (3.36) chia cho hệ số của phương trình (2.32) ta sẽ được thành phần $S(0)$ cho phản ứng $\alpha + {}^8\text{Be}$

$$S(0) = \frac{4,168 \times 10^{-17}}{1,638 \times 10^{-14}} = 2,54 \times 10^{-3}$$

Đồng nhất hệ số (4.16) và (4.13) ta tính được:

$$\frac{S'(0)}{S(0)} = 7,756; \frac{S''(0)}{S(0)} = 83,84; E_G^{1/2} = 12,926 \text{ MeV}^{1/2},$$

Như vậy tốc độ phản ứng không cộng hưởng được xác định bởi công thức:

$$N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha {}^8\text{Be} nr} = N_A B \times 1,987 \times 10^{-11} T_9^{-1/2} \times \int_0^\infty \left(7,756 + \frac{1}{E} + 83,84E \right) \exp \left(-\frac{11,605^\alpha E^\alpha}{T_9^\alpha} - \frac{12,93}{E^{1/2}} - \left(\frac{T_9}{0,235} \right)^2 \right) dE \quad (4.17)$$

trong công thức trên $\langle \sigma v \rangle_{\alpha {}^8\text{Be} nr}$ là tốc độ phản ứng không cộng hưởng giữa các hạt alpha trong một cm^3 trong một giây.

4.2.3. Tốc độ phản ứng toàn phần cho phân bố Levy.

Tốc độ phản ứng toàn phần cho phân bố Levy được xác định bởi công thức:

$$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} = 3 \frac{\hbar}{\Gamma_\alpha({}^8\text{Be})} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha {}^8\text{Be}}$$

$$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} = 2,904 \times 10^{-16} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha {}^8\text{Be}} \quad (4.18)$$

Trong đó $N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha} = N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha r} + N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha nr}$

$$\text{và} \quad N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha^8 Be} = N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha^8 Be r} + N_A \langle \sigma v \rangle_{\alpha^8 Be nr}$$

Các tích phân trong các phương trình (4.15) và (4.17) có thể tính toán dễ dàng với các phần mềm tính toán như Mathematica, Matlab, Maple, ... Tương ứng với mỗi cặp giá trị của α và B, sau khi tính toán, ta được một bảng giá trị tốc độ phản ứng toàn phần ứng với mỗi giá trị nhiệt độ như sau, kết quả tính toán được cho trong các bảng trong phụ lục:

Trong các bảng số liệu trong phần phụ lục dưới đây;

+ Cột 1: T_9 là nhiệt độ tính theo đơn vị tỉ độ.

+ Cột 2: là tốc độ phản ứng ba alpha tính cho phân bố Levy.

+ Cột 3: là tốc độ phản ứng ba alpha tính cho phân bố Maxwell Boltzmann.

+ Cột 4: là tốc độ phản ứng toàn phần $\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_{MB} + \langle \sigma v \rangle_{Levy}$

+ Cột 5: là tỉ số giữa phân bố Levy so với phổ toàn phần, cột này dùng để đánh giá đóng góp của phân bố Levy cho phản ứng ba alpha.

4.3. Kết quả bài toán – thảo luận.

Đầu tiên ta có nhận xét về hàm phân bố Maxwell Boltzmann:

$$\Phi(E)_{MB} = \left(\frac{8}{\pi\mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{1/2}} \frac{E}{kT} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$$

Hàm này sẽ giảm rất nhanh về 0 khi năng lượng $E \gg kT$.

Trong công thức tính xác suất xuyên rào (2.20):

$$P = \exp \left\{ -2KR_c \left[\frac{\arctan\left(\frac{R_c}{R_n} - 1\right)^{1/2}}{\left(\frac{R_c}{R_n} - 1\right)^{1/2}} - \frac{R_n}{R_c} \right] \right\} \quad \text{Trong}$$

$$\text{Với} \quad K = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} (E_c - E) \right]^{1/2}, \quad R_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E} \text{ là vị trí xuyên rào, } E_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_n} \text{ độ}$$

cao thế Coulomb.

Như vậy có thể dễ dàng nhận thấy ở nhiệt độ thấp thì xác suất để các hạt có điện tích hạt nhân Z lớn có thể xuyên rào thế Coulomb và xảy ra phản ứng là rất thấp

Với hai lí do trên ta có thể nhận thấy theo phân bố Maxwell Boltzmann thì xác suất để xảy ra các phản ứng hạt nhân cho những hạt có điện tích hạt nhân Z lớn là rất thấp.

Trong khi đó nếu ta hiệu chỉnh phân bố Maxwell Boltzmann bằng cách công thêm vào phân bố Levy có dạng:

$$\Phi(E)_{Levy} = B \left(\frac{8\mu}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{1/2}} \exp \left(- \left(\frac{E}{kT} \right)^\alpha \right)$$

Trong phân bố Levy, hệ số $\alpha = 0,1 \rightarrow 0,34$ và $B = 10^{-17} \rightarrow 10^{-39}$ và như vậy hàm phân bố Levy giảm rất chậm so với hàm phân bố Maxwell Boltzmann. Chính vì vậy, mặc dù xác suất xuyên rào đối với các hạt có điện tích hạt nhân Z lớn là nhỏ, nhưng tốc độ phản ứng tính theo phân bố Levy vẫn lớn hơn nhiều so với phân bố Maxwell Boltzmann.

Khi áp dụng phân bố Lévy đã nghiên cứu trong luận văn của Nguyễn Hoàng Phúc vào luận văn này để tính tốc độ phản ứng ba alpha, kết quả thu được cho thấy tốc độ phản ứng ba alpha tăng đáng kể từ 20 đến hơn 30 bậc so với các số liệu từ NACRE [7] (giải với phân bố Maxwell - Boltzmann). Sự chênh lệch này là rất đáng chú ý và cũng phù hợp với dự đoán ban đầu của chúng ta. Nếu các thực nghiệm các phép đo về phổ thông lượng neutrino trong tương lai khẳng định sự đúng đắn trong giả thiết của chúng tôi đưa ra, thì chúng ta phải tính lại tốc độ phản ứng cho một số các phản ứng của những hạt nhân có Z lớn.

Trong các bảng số liệu kết quả tính toán, nếu để ý chúng ta sẽ thấy là tốc độ phản ứng tính cho phân bố Levy có tồn tại giá trị cực đại ở nhiệt độ khoảng 100 triệu độ. Vậy đâu là lí do làm xuất hiện đỉnh này? Như ta đã biết, trong khai triển của hệ số thiên văn $S(E)$ ta chỉ đã bỏ hết các phần tử có bậc lớn hơn hai. Do đó hàm $S(E)$ là hàm tăng theo năng lượng E của hạt. Để hiệu chỉnh sự sai lệch này người ta

đã đưa vào phân tử $f_{cutoff} = \exp\left(-\left(\frac{T_9}{T_9cutoff}\right)^2\right)$. Chính phân tử f_{cutoff} này chính là

nguyên nhân làm xuất hiện đỉnh cực đại trong kết quả tính tốc độ phản ứng.

Tuy nhiên trong quá trình thực hiện luận văn này, vì lí do thời gian mà tôi chưa thể đánh giá được sai số từ thực nghiệm ảnh hưởng đến các kết quả tính toán. Đây là một trong những trở ngại của tôi khi trình bày luận văn này. Tôi cũng hy vọng rằng trong thời gian tới tôi có thể giải quyết được vấn đề này.

CÁC TÀI LIỆU THAM KHẢO.

- [1]. Bernard E. J. Pagel, *Nucleosynthesis and Chemical Evolution of Galaxies*, The Cambridge University Press, (2009).
- [2]. Claus E. Rolfs and William S. Rosney, *Cauldrons in the Cosmos*, The University of Chicago Press, (1988).
- [3]. C. Agulo et al, “A compilation of charged particle induced thermonuclear reaction rates” *Nucl. Phys. A* 656, 3 – 183 (1999).
- [4]. Fowler, William A., Georgeanne R. Caughlan, & Barbara A. Zimmerman, Ann, “Thermonuclear Reaction Rates,” *Ann. Rev. Astr. Astrophys.* 5, 525-70 (1967).
- [5]. Fowler, William A., Georgeanne R. Caughlan, & Barbara A. Zimmerman, “Thermonuclear Reaction Rates, II,” *Ann. Rev. Astr. Astrophys.* 13, 69-112 (1975).
- [6]. Fowler, W. A., “Experimental and Theoretical Nuclear Astrophysics: The Quest for the Origin of the Elements,” *Rev. Mod. Phys.* 56, 149-79 (1984).
- [7]. http://pntpm3.ulb.ac.be/Nacre/barre_files.htm.
- [8] Hans O. U. Fynbo, Christian Aa. Diget, Uffe C. Bergmann, “Revised rates for the stellar triple – α process from measurement of ^{12}C nuclear resonances” *Nature* 433, 136 – 139 (2005).
- [9]. K. Ogata, M. Kan, and M. Kanimura, “Quantum three body calculation of the nonresonant triple – α reaction rate at low temperatures”, *arXiv:0905.0007* (2009).
- [10] K. Nomoto, F.-K. Thielemann, and S. Miyaji, “The triple alpha reaction at low temperatures in accreting white dwarfs and neutron stars”, *Astron. Astrophys.* 149, 239-245 (1985).
- [11]. P Descouvemont, “The R – matrix theory”, *arXiv:1001.0678* (2010).
- [12]. T. Matsumoto, T. Kamizato, K.Ogata, Y. Iseri, E. Hiyama, M. Kamimura, and M. Yahiro, “New treatment of breakup continuum in the method of continuum discretized coupled channels”, *arXiv:0302034* (2003).
- [13]. W.A. Fowler and J.L. Vogl In: “*Lectures in theoretical physics Vol. VI*”, University of Colorado Press, Boulder (1964)

- [14] W. Kaina, V. Soergel, W. Trost và G. Zinser, “Beta decay of ^{12}B and ^{12}N to the first excited state of ^{12}C (4,44 MeV)” *Z. Phys. A – Atom and nuclei* 310, 183 – 188 (1981)
- [15] Y. Kanada-En’yo, “Structure of ground and excited states of ^{12}C ” *arXiv:0605047v1* (2006).

PHỤ LỤC

Với $\alpha = 0,1$ và $B = 3,1 \times 10^{-39}$

T_9	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{Levy}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{MB}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{MB + Levy}$	Tỉ lệ (Levy+MB)/MB
0.01	2.9815E-26	5.48842E-71	2.9815E-26	5.43234E+44
0.011	3.95828E-26	1.09333E-68	3.95828E-26	3.6204E+42
0.012	5.1246E-26	1.18831E-66	5.1246E-26	4.3125E+40
0.013	6.49571E-26	7.88071E-65	6.49571E-26	8.24254E+38
0.014	8.08636E-26	3.47017E-63	8.08636E-26	2.33025E+37
0.015	9.9108E-26	1.083E-61	9.9108E-26	9.15126E+35
0.016	1.19827E-25	2.52167E-60	1.19827E-25	4.75188E+34
0.017	1.43151E-25	4.56419E-59	1.43151E-25	3.13639E+33
0.018	1.69204E-25	6.63908E-58	1.69204E-25	2.54861E+32
0.02	2.29962E-25	8.09608E-56	2.29962E-25	2.84041E+30
0.025	4.36974E-25	1.23968E-51	4.36974E-25	3.52488E+26
0.03	7.30155E-25	2.36544E-48	7.30155E-25	3.08676E+23
0.04	1.58886E-24	2.48615E-42	1.58886E-24	6.39086E+17
0.05	2.78004E-24	5.59026E-38	2.78004E-24	4.973E+13
0.06	4.19961E-24	7.14103E-35	4.19961E-24	58809661372
0.07	5.68913E-24	2.01446E-32	5.68913E-24	282415194.3
0.08	7.06969E-24	9.40808E-30	7.0697E-24	751449.8723
0.09	8.17748E-24	2.94286E-27	8.18042E-24	2779.750687
0.1	8.89271E-24	3.09221E-25	9.20193E-24	29.75842749
0.11	9.15668E-24	1.3761E-23	2.29177E-23	1.665409277
0.12	8.97456E-24	3.20314E-22	3.29289E-22	1.028017991
0.13	8.40603E-24	4.53161E-21	4.54001E-21	1.001854978
0.14	7.54775E-24	4.33904E-20	4.33979E-20	1.00017395
0.15	6.51277E-24	3.04256E-19	3.04262E-19	1.000021406
0.16	5.41122E-24	1.65742E-18	1.65743E-18	1.000003265
0.18	3.35569E-24	2.73407E-17	2.73407E-17	1.000000123
0.2	1.81809E-24	2.51325E-16	2.51325E-16	1.000000007
0.25	2.26962E-25	1.26733E-14	1.26733E-14	1
0.3	1.36045E-26	1.60848E-13	1.60848E-13	1
0.35	4.06713E-28	9.37869E-13	9.37869E-13	1
0.4	6.20308E-30	3.38513E-12	3.38513E-12	1
0.45	4.89761E-32	8.91317E-12	8.91317E-12	1
0.5	2.02189E-34	1.88764E-11	1.88764E-11	1
0.6	5.05865E-40	5.51956E-11	5.51956E-11	1
0.7	1.00907E-46	1.12782E-10	1.12782E-10	1
0.8	1.64158E-54	1.8541E-10	1.8541E-10	1

0.9	2.21002E-63	2.64818E-10	2.64818E-10	1
1	2.48844E-73	3.43812E-10	3.43812E-10	1
1.25	7.38389E-81	5.11535E-10	5.11535E-10	1
1.5	3.53691E-86	6.19917E-10	6.19917E-10	1
1.75	1.70772E-92	6.75209E-10	6.75209E-10	1
2	8.3811E-100	6.92477E-10	6.92477E-10	1
2.5	3.8883E-117	6.6328E-10	6.6328E-10	1
3	1.4895E-117	5.99303E-10	5.99303E-10	1
3.5	1.3146E-117	5.29265E-10	5.29265E-10	1
4	1.1794E-117	4.63801E-10	4.63801E-10	1
5	9.83E-118	3.56444E-10	3.56444E-10	1
6	8.4651E-118	2.78091E-10	2.78091E-10	1
7	7.4565E-118	2.21144E-10	2.21144E-10	1
8	6.6783E-118	1.79135E-10	1.79135E-10	1
9	6.058E-118	1.47541E-10	1.47541E-10	1
10	5.551E-118	1.23317E-10	1.23317E-10	1

Với $\alpha = 0,16$ và $B = 1,8 \times 10^{-36}$

T_9	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{Levy}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{MB}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha}$ MB + Levy	Tỉ lệ (Levy+MB)/MB
0.01	3.46791E-39	5.48842E-71	3.46791E-39	6.31859E+31
0.011	4.67362E-39	1.09333E-68	4.67362E-39	4.27467E+29
0.012	6.13103E-39	1.18831E-66	6.13103E-39	5.15944E+27
0.013	7.86293E-39	7.88071E-65	7.86293E-39	9.97745E+25
0.014	9.89177E-39	3.47017E-63	9.89177E-39	2.85051E+24
0.015	1.22391E-38	1.083E-61	1.22391E-38	1.13011E+23
0.016	1.4926E-38	2.52167E-60	1.4926E-38	5.91908E+21
0.017	1.79727E-38	4.56419E-59	1.79727E-38	3.93777E+20
0.018	2.13984E-38	6.63908E-58	2.13984E-38	3.2231E+19
0.02	2.94607E-38	8.09608E-56	2.94607E-38	3.63889E+17
0.025	5.74298E-38	1.23968E-51	5.74298E-38	4.63261E+13
0.03	9.78132E-38	2.36544E-48	9.78132E-38	41350973433
0.04	2.18728E-37	2.48615E-42	2.1873E-37	87979.45429
0.05	3.90005E-37	5.59026E-38	4.45908E-37	7.97650508
0.06	5.97526E-37	7.14103E-35	7.20078E-35	1.00836751
0.07	8.18459E-37	2.01446E-32	2.01454E-32	1.000040629
0.08	1.02625E-36	9.40808E-30	9.40808E-30	1.000000109
0.09	1.19597E-36	2.94286E-27	2.94286E-27	1
0.1	1.30888E-36	3.09221E-25	3.09221E-25	1
0.11	1.35517E-36	1.3761E-23	1.3761E-23	1
0.12	1.33463E-36	3.20314E-22	3.20314E-22	1
0.13	1.25542E-36	4.53161E-21	4.53161E-21	1
0.14	1.13155E-36	4.33904E-20	4.33904E-20	1
0.15	9.79742E-37	3.04256E-19	3.04256E-19	1
0.16	8.16566E-37	1.65742E-18	1.65742E-18	1
0.18	5.0915E-37	2.73407E-17	2.73407E-17	1
0.2	2.77134E-37	2.51325E-16	2.51325E-16	1
0.25	3.49121E-38	1.26733E-14	1.26733E-14	1
0.3	2.10688E-39	1.60848E-13	1.60848E-13	1
0.35	6.33191E-41	9.37869E-13	9.37869E-13	1
0.4	9.69855E-43	3.38513E-12	3.38513E-12	1
0.45	7.68471E-45	8.91317E-12	8.91317E-12	1
0.5	3.18206E-47	1.88764E-11	1.88764E-11	1
0.6	8.00016E-53	5.51956E-11	5.51956E-11	1
0.7	1.6019E-59	1.12782E-10	1.12782E-10	1
0.8	2.61402E-67	1.8541E-10	1.8541E-10	1
0.9	3.53789E-76	2.64818E-10	2.64818E-10	1
1	3.51667E-80	3.43812E-10	3.43812E-10	1
1.25	1.72246E-84	5.11535E-10	5.11535E-10	1

1.5	8.35377E-90	6.19917E-10	6.19917E-10	1
1.75	4.07388E-96	6.75209E-10	6.75209E-10	1
2	2.016E-103	6.92477E-10	6.92477E-10	1
2.5	5.9819E-112	6.6328E-10	6.6328E-10	1
3	5.2678E-112	5.99303E-10	5.99303E-10	1
3.5	4.7251E-112	5.29265E-10	5.29265E-10	1
4	4.2965E-112	4.63801E-10	4.63801E-10	1
5	3.6587E-112	3.56444E-10	3.56444E-10	1
6	3.2033E-112	2.78091E-10	2.78091E-10	1
7	2.8596E-112	2.21144E-10	2.21144E-10	1
8	2.5898E-112	1.79135E-10	1.79135E-10	1
9	2.3716E-112	1.47541E-10	1.47541E-10	1
10	2.191E-112	1.23317E-10	1.23317E-10	1

Với $\alpha = 0,2$ và $B = 3,7 \times 10^{-34}$

T_9	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{Levy}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{MB}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha}$ MB + Levy	Tỉ lệ (Levy+MB)/MB
0.01	1.18359E-40	5.48842E-71	1.18359E-40	2.15653E+30
0.011	1.69217E-40	1.09333E-68	1.69217E-40	1.54772E+28
0.012	2.33936E-40	1.18831E-66	2.33936E-40	1.96864E+26
0.013	3.14464E-40	7.88071E-65	3.14464E-40	3.9903E+24
0.014	4.12777E-40	3.47017E-63	4.12777E-40	1.1895E+23
0.015	5.3088E-40	1.083E-61	5.3088E-40	4.90195E+21
0.016	6.70785E-40	2.52167E-60	6.70785E-40	2.66008E+20
0.017	8.34503E-40	4.56419E-59	8.34503E-40	1.82837E+19
0.018	1.02404E-39	6.63908E-58	1.02404E-39	1.54244E+18
0.02	1.48846E-39	8.09608E-56	1.48846E-39	1.8385E+16
0.025	3.23557E-39	1.23968E-51	3.23557E-39	2.61E+12
0.03	5.98942E-39	2.36544E-48	5.98942E-39	2532053372
0.04	1.51237E-38	2.48615E-42	1.51262E-38	6084.191028
0.05	2.93989E-38	5.59026E-38	8.53016E-38	1.525894821
0.06	4.81027E-38	7.14103E-35	7.14584E-35	1.00067361
0.07	6.94318E-38	2.01446E-32	2.01446E-32	1.000003447
0.08	9.08925E-38	9.40808E-30	9.40808E-30	1.00000001
0.09	1.09843E-37	2.94286E-27	2.94286E-27	1
0.1	1.24022E-37	3.09221E-25	3.09221E-25	1
0.11	1.31948E-37	1.3761E-23	1.3761E-23	1
0.12	1.33105E-37	3.20314E-22	3.20314E-22	1
0.13	1.27914E-37	4.53161E-21	4.53161E-21	1
0.14	1.17534E-37	4.33904E-20	4.33904E-20	1
0.15	1.03557E-37	3.04256E-19	3.04256E-19	1
0.16	8.76939E-38	1.65742E-18	1.65742E-18	1
0.18	5.62347E-38	2.73407E-17	2.73407E-17	1
0.2	3.13537E-38	2.51325E-16	2.51325E-16	1
0.25	4.14308E-39	1.26733E-14	1.26733E-14	1
0.3	2.59205E-40	1.60848E-13	1.60848E-13	1
0.35	8.01524E-42	9.37869E-13	9.37869E-13	1
0.4	1.25664E-43	3.38513E-12	3.38513E-12	1
0.45	1.01535E-45	8.91317E-12	8.91317E-12	1
0.5	4.27515E-48	1.88764E-11	1.88764E-11	1
0.6	1.10452E-53	5.51956E-11	5.51956E-11	1
0.7	2.25965E-60	1.12782E-10	1.12782E-10	1
0.8	3.75254E-68	1.8541E-10	1.8541E-10	1
0.9	1.23307E-76	2.64818E-10	2.64818E-10	1
1	2.64267E-78	3.43812E-10	3.43812E-10	1
1.25	1.32773E-82	5.11535E-10	5.11535E-10	1

1.5	6.56389E-88	6.19917E-10	6.19917E-10	1
1.75	3.24981E-94	6.75209E-10	6.75209E-10	1
2	1.6282E-101	6.92477E-10	6.92477E-10	1
2.5	2.5711E-107	6.6328E-10	6.6328E-10	1
3	2.2936E-107	5.99303E-10	5.99303E-10	1
3.5	2.0786E-107	5.29265E-10	5.29265E-10	1
4	1.906E-107	4.63801E-10	4.63801E-10	1
5	1.6446E-107	3.56444E-10	3.56444E-10	1
6	1.4542E-107	2.78091E-10	2.78091E-10	1
7	1.3084E-107	2.21144E-10	2.21144E-10	1
8	1.1925E-107	1.79135E-10	1.79135E-10	1
9	1.0979E-107	1.47541E-10	1.47541E-10	1
10	1.0189E-107	1.23317E-10	1.23317E-10	1

Với $\alpha = 0,26$ và $B = 7,8 \times 10^{-29}$

T_9	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha}$ Levy	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha}$ MB	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha}$ MB + Levy	Tỉ lệ (Levy+MB)/MB
0.01	5.12322E-37	5.48842E-71	5.12322E-37	9.33461E+33
0.011	8.66933E-37	1.09333E-68	8.66933E-37	7.92931E+31
0.012	1.39308E-36	1.18831E-66	1.39308E-36	1.17232E+30
0.013	2.14445E-36	7.88071E-65	2.14445E-36	2.72114E+28
0.014	3.18362E-36	3.47017E-63	3.18362E-36	9.17423E+26
0.015	4.58229E-36	1.083E-61	4.58229E-36	4.23112E+25
0.016	6.42138E-36	2.52167E-60	6.42138E-36	2.54648E+24
0.017	8.79102E-36	4.56419E-59	8.79102E-36	1.92609E+23
0.018	1.17906E-35	6.63908E-58	1.17906E-35	1.77593E+22
0.02	2.0121E-35	8.09608E-56	2.0121E-35	2.48528E+20
0.025	6.05825E-35	1.23968E-51	6.05825E-35	4.88693E+16
0.03	1.44343E-34	2.36544E-48	1.44343E-34	6.10218E+13
0.04	5.29864E-34	2.48615E-42	5.29864E-34	213126099.9
0.05	1.35033E-33	5.59026E-38	1.35038E-33	24155.94028
0.06	2.72353E-33	7.14103E-35	2.79494E-33	39.13918081
0.07	4.65376E-33	2.01446E-32	2.47983E-32	1.231018177
0.08	7.01003E-33	9.40808E-30	9.41509E-30	1.000745108
0.09	9.54601E-33	2.94286E-27	2.94287E-27	1.000003244
0.1	1.19527E-32	3.09221E-25	3.09221E-25	1.000000039
0.11	1.39261E-32	1.3761E-23	1.3761E-23	1.000000001
0.12	1.52297E-32	3.20314E-22	3.20314E-22	1
0.13	1.5736E-32	4.53161E-21	4.53161E-21	1
0.14	1.5439E-32	4.33904E-20	4.33904E-20	1
0.15	1.44407E-32	3.04256E-19	3.04256E-19	1
0.16	1.29172E-32	1.65742E-18	1.65742E-18	1
0.18	9.12945E-33	2.73407E-17	2.73407E-17	1
0.2	5.53666E-33	2.51325E-16	2.51325E-16	1
0.25	8.66567E-34	1.26733E-14	1.26733E-14	1
0.3	6.17282E-35	1.60848E-13	1.60848E-13	1
0.35	2.118E-36	9.37869E-13	9.37869E-13	1
0.4	3.61885E-38	3.38513E-12	3.38513E-12	1
0.45	3.14482E-40	8.91317E-12	8.91317E-12	1
0.5	1.40991E-42	1.88764E-11	1.88764E-11	1
0.6	4.04014E-48	5.51956E-11	5.51956E-11	1
0.7	8.97819E-55	1.12782E-10	1.12782E-10	1
0.8	1.59628E-62	1.8541E-10	1.8541E-10	1
0.9	8.2985E-69	2.64818E-10	2.64818E-10	1
1	3.16102E-70	3.43812E-10	3.43812E-10	1
1.25	1.71566E-74	5.11535E-10	5.11535E-10	1

1.5	8.9939E-80	6.19917E-10	6.19917E-10	1
1.75	4.66527E-86	6.75209E-10	6.75209E-10	1
2	2.4298E-93	6.92477E-10	6.92477E-10	1
2.5	1.16981E-96	6.6328E-10	6.6328E-10	1
3	1.06345E-96	5.99303E-10	5.99303E-10	1
3.5	9.7802E-97	5.29265E-10	5.29265E-10	1
4	9.07551E-97	4.63801E-10	4.63801E-10	1
5	7.9739E-97	3.56444E-10	3.56444E-10	1
6	7.14566E-97	2.78091E-10	2.78091E-10	1
7	6.49577E-97	2.21144E-10	2.21144E-10	1
8	5.96961E-97	1.79135E-10	1.79135E-10	1
9	5.53329E-97	1.47541E-10	1.47541E-10	1
10	5.16455E-97	1.23317E-10	1.23317E-10	1

Với $\alpha = 0,3$ và $B = 4,9 \times 10^{-23}$

T_9	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha}$ Levy	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha}$ MB	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha}$ MB + Levy	Tỉ lệ (Levy+MB)/MB
0.01	1.16496E-29	5.48842E-71	1.16496E-29	2.12257E+41
0.011	2.29332E-29	1.09333E-68	2.29332E-29	2.09756E+39
0.012	4.2183E-29	1.18831E-66	4.2183E-29	3.54982E+37
0.013	7.33454E-29	7.88071E-65	7.33454E-29	9.30696E+35
0.014	1.21631E-28	3.47017E-63	1.21631E-28	3.50503E+34
0.015	1.93722E-28	1.083E-61	1.93722E-28	1.78876E+33
0.016	2.97983E-28	2.52167E-60	2.97983E-28	1.18169E+32
0.017	4.44667E-28	4.56419E-59	4.44667E-28	9.74253E+30
0.018	6.46124E-28	6.63908E-58	6.46124E-28	9.73213E+29
0.02	1.27433E-27	8.09608E-56	1.27433E-27	1.57401E+28
0.025	5.14977E-27	1.23968E-51	5.14977E-27	4.1541E+24
0.03	1.54207E-26	2.36544E-48	1.54207E-26	6.51919E+21
0.04	7.9525E-26	2.48615E-42	7.9525E-26	3.19872E+16
0.05	2.59452E-25	5.59026E-38	2.59452E-25	4.64113E+12
0.06	6.33775E-25	7.14103E-35	6.33775E-25	8875124612
0.07	1.2645E-24	2.01446E-32	1.2645E-24	62771505.2
0.08	2.16763E-24	9.40808E-30	2.16764E-24	230401.7706
0.09	3.29601E-24	2.94286E-27	3.29896E-24	1121.003244
0.1	4.54184E-24	3.09221E-25	4.85106E-24	15.68799233
0.11	5.75741E-24	1.3761E-23	1.95184E-23	1.418387
0.12	6.78769E-24	3.20314E-22	3.27102E-22	1.021190717
0.13	7.50359E-24	4.53161E-21	4.53911E-21	1.001655834
0.14	7.82709E-24	4.33904E-20	4.33982E-20	1.000180388
0.15	7.74209E-24	3.04256E-19	3.04264E-19	1.000025446
0.16	7.29038E-24	1.65742E-18	1.65743E-18	1.000004399
0.18	5.64585E-24	2.73407E-17	2.73407E-17	1.000000206
0.2	3.70652E-24	2.51325E-16	2.51325E-16	1.000000015
0.25	6.81046E-25	1.26733E-14	1.26733E-14	1
0.3	5.49024E-26	1.60848E-13	1.60848E-13	1
0.35	2.08125E-27	9.37869E-13	9.37869E-13	1
0.4	3.86309E-29	3.38513E-12	3.38513E-12	1
0.45	3.60197E-31	8.91317E-12	8.91317E-12	1
0.5	1.71634E-33	1.88764E-11	1.88764E-11	1
0.6	5.44113E-39	5.51956E-11	5.51956E-11	1
0.7	1.31147E-45	1.12782E-10	1.12782E-10	1
0.8	2.49439E-53	1.8541E-10	1.8541E-10	1
0.9	1.72601E-58	2.64818E-10	2.64818E-10	1
1	6.83026E-60	3.43812E-10	3.43812E-10	1
1.25	3.98145E-64	5.11535E-10	5.11535E-10	1

1.5	2.20406E-69	6.19917E-10	6.19917E-10	1
1.75	1.19414E-75	6.75209E-10	6.75209E-10	1
2	6.49468E-83	6.92477E-10	6.92477E-10	1
2.5	4.68316E-85	6.6328E-10	6.6328E-10	1
3	4.30989E-85	5.99303E-10	5.99303E-10	1
3.5	4.00103E-85	5.29265E-10	5.29265E-10	1
4	3.7405E-85	4.63801E-10	4.63801E-10	1
5	3.32326E-85	3.56444E-10	3.56444E-10	1
6	3.00191E-85	2.78091E-10	2.78091E-10	1
7	2.74535E-85	2.21144E-10	2.21144E-10	1
8	2.53488E-85	1.79135E-10	1.79135E-10	1
9	2.35852E-85	1.47541E-10	1.47541E-10	1
10	2.20821E-85	1.23317E-10	1.23317E-10	1

Với $\alpha = 0,32$ và $B = 4,3 \times 10^{-19}$

T_9	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{Levy}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{MB}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{MB + Levy}$	Tỉ lệ (Levy+MB)/MB
0.01	7.55683E-24	5.48842E-71	7.55683E-24	1.37687E+47
0.011	1.61987E-23	1.09333E-68	1.61987E-23	1.4816E+45
0.012	3.21486E-23	1.18831E-66	3.21486E-23	2.7054E+43
0.013	5.98614E-23	7.88071E-65	5.98614E-23	7.59594E+41
0.014	1.05641E-22	3.47017E-63	1.05641E-22	3.04426E+40
0.015	1.78103E-22	1.083E-61	1.78103E-22	1.64454E+39
0.016	2.8868E-22	2.52167E-60	2.8868E-22	1.14479E+38
0.017	4.52146E-22	4.56419E-59	4.52146E-22	9.90639E+36
0.018	6.87206E-22	6.63908E-58	6.87206E-22	1.03509E+36
0.02	1.47002E-21	8.09608E-56	1.47002E-21	1.81572E+34
0.025	7.00651E-21	1.23968E-51	7.00651E-21	5.65185E+30
0.03	2.38475E-20	2.36544E-48	2.38475E-20	1.00817E+28
0.04	1.4877E-19	2.48615E-42	1.4877E-19	5.98393E+22
0.05	5.57318E-19	5.59026E-38	5.57318E-19	9.96943E+18
0.06	1.51537E-18	7.14103E-35	1.51537E-18	2.12206E+16
0.07	3.29726E-18	2.01446E-32	3.29726E-18	1.6368E+14
0.08	6.07607E-18	9.40808E-30	6.07607E-18	6.45836E+11
0.09	9.82707E-18	2.94286E-27	9.82707E-18	3339291648
0.1	1.42868E-17	3.09221E-25	1.42868E-17	46202686.75
0.11	1.89856E-17	1.3761E-23	1.89856E-17	1379670.35
0.12	2.33438E-17	3.20314E-22	2.33441E-17	72878.81952
0.13	2.68003E-17	4.53161E-21	2.68049E-17	5915.088655
0.14	2.89308E-17	4.33904E-20	2.89742E-17	667.7553289
0.15	2.95266E-17	3.04256E-19	2.98309E-17	98.04528397
0.16	2.86147E-17	1.65742E-18	3.02722E-17	18.26461481
0.18	2.3324E-17	2.73407E-17	5.06647E-17	1.853086949
0.2	1.60076E-17	2.51325E-16	2.67333E-16	1.063692627
0.25	3.2179E-18	1.26733E-14	1.26765E-14	1.000253912
0.3	2.78054E-19	1.60848E-13	1.60849E-13	1.000001729
0.35	1.11471E-20	9.37869E-13	9.37869E-13	1.000000012
0.4	2.16761E-22	3.38513E-12	3.38513E-12	1
0.45	2.10272E-24	8.91317E-12	8.91317E-12	1
0.5	1.0369E-26	1.88764E-11	1.88764E-11	1
0.6	3.47971E-32	5.51956E-11	5.51956E-11	1
0.7	8.78015E-39	1.12782E-10	1.12782E-10	1
0.8	1.73509E-46	1.8541E-10	1.8541E-10	1
0.9	3.61931E-51	2.64818E-10	2.64818E-10	1

1	1.46102E-52	3.43812E-10	3.43812E-10	1
1.25	8.8607E-57	5.11535E-10	5.11535E-10	1
1.5	5.05593E-62	6.19917E-10	6.19917E-10	1
1.75	2.80637E-68	6.75209E-10	6.75209E-10	1
2	1.58433E-75	6.92477E-10	6.92477E-10	1
2.5	3.63098E-77	6.6328E-10	6.6328E-10	1
3	3.36183E-77	5.99303E-10	5.99303E-10	1
3.5	3.13521E-77	5.29265E-10	5.29265E-10	1
4	2.9416E-77	4.63801E-10	4.63801E-10	1
5	2.62736E-77	3.56444E-10	3.56444E-10	1
6	2.38218E-77	2.78091E-10	2.78091E-10	1
7	2.18463E-77	2.21144E-10	2.21144E-10	1
8	2.02146E-77	1.79135E-10	1.79135E-10	1
9	1.88402E-77	1.47541E-10	1.47541E-10	1
10	1.76638E-77	1.23317E-10	1.23317E-10	1

Với $\alpha = 0,33$ và $B = 9 \times 10^{-17}$

T_9	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{Levy}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{MB}$	$N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{\alpha\alpha\alpha} \text{MB + Levy}$	Tỉ lệ (Levy+MB)/MB
0.01	3.08039E-20	5.48842E-71	3.08039E-20	5.61253E+50
0.011	6.90525E-20	1.09333E-68	6.90525E-20	6.31581E+48
0.012	1.42628E-19	1.18831E-66	1.42628E-19	1.20025E+47
0.013	2.75299E-19	7.88071E-65	2.75299E-19	3.49333E+45
0.014	5.01965E-19	3.47017E-63	5.01965E-19	1.44651E+44
0.015	8.71935E-19	1.083E-61	8.71935E-19	8.05113E+42
0.016	1.45262E-18	2.52167E-60	1.45262E-18	5.76053E+41
0.017	2.33368E-18	4.56419E-59	2.33368E-18	5.11302E+40
0.018	3.63154E-18	6.63908E-58	3.63154E-18	5.46995E+39
0.02	8.10623E-18	8.09608E-56	8.10623E-18	1.00125E+38
0.025	4.2127E-17	1.23968E-51	4.2127E-17	3.3982E+34
0.03	1.53332E-16	2.36544E-48	1.53332E-16	6.48219E+31
0.04	1.05674E-15	2.48615E-42	1.05674E-15	4.25051E+26
0.05	4.25557E-15	5.59026E-38	4.25557E-15	7.61247E+22
0.06	1.22377E-14	7.14103E-35	1.22377E-14	1.71371E+20
0.07	2.7862E-14	2.01446E-32	2.7862E-14	1.3831E+18
0.08	5.33194E-14	9.40808E-30	5.33194E-14	5.66741E+15
0.09	8.90593E-14	2.94286E-27	8.90593E-14	3.02628E+13
0.1	1.33149E-13	3.09221E-25	1.33149E-13	4.30596E+11
0.11	1.81353E-13	1.3761E-23	1.81353E-13	13178759145
0.12	2.27931E-13	3.20314E-22	2.27931E-13	711587272.7
0.13	2.66895E-13	4.53161E-21	2.66895E-13	58896245.45
0.14	2.93314E-13	4.33904E-20	2.93314E-13	6759890.489
0.15	3.04284E-13	3.04256E-19	3.04284E-13	1000093.727
0.16	2.99347E-13	1.65742E-18	2.99349E-13	180611.3796
0.18	2.50604E-13	2.73407E-17	2.50631E-13	9166.950118
0.2	1.76023E-13	2.51325E-16	1.76274E-13	701.3792184
0.25	3.70837E-14	1.26733E-14	4.9757E-14	3.926132534
0.3	3.32249E-15	1.60848E-13	1.64171E-13	1.020656062
0.35	1.37143E-16	9.37869E-13	9.38006E-13	1.000146228
0.4	2.73235E-18	3.38513E-12	3.38514E-12	1.000000807
0.45	2.70586E-20	8.91317E-12	8.91317E-12	1.000000003
0.5	1.35842E-22	1.88764E-11	1.88764E-11	1
0.6	4.6961E-28	5.51956E-11	5.51956E-11	1
0.7	1.21361E-34	1.12782E-10	1.12782E-10	1
0.8	2.44693E-42	1.8541E-10	1.8541E-10	1
0.9	8.54453E-47	2.64818E-10	2.64818E-10	1
1	3.48485E-48	3.43812E-10	3.43812E-10	1
1.25	2.1574E-52	5.11535E-10	5.11535E-10	1

1.5	1.25051E-57	6.19917E-10	6.19917E-10	1
1.75	7.0289E-64	6.75209E-10	6.75209E-10	1
2	4.08252E-71	6.92477E-10	6.92477E-10	1
2.5	1.59588E-72	6.6328E-10	6.6328E-10	1
3	1.48202E-72	5.99303E-10	5.99303E-10	1
3.5	1.38524E-72	5.29265E-10	5.29265E-10	1
4	1.302E-72	4.63801E-10	4.63801E-10	1
5	1.16592E-72	3.56444E-10	3.56444E-10	1
6	1.05903E-72	2.78091E-10	2.78091E-10	1
7	9.72495E-73	2.21144E-10	2.21144E-10	1
8	9.00777E-73	1.79135E-10	1.79135E-10	1
9	8.40204E-73	1.47541E-10	1.47541E-10	1
10	7.8825E-73	1.23317E-10	1.23317E-10	1