ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TP.HỒ CHÍ MINH

Ngô Thanh Mỹ

SỰ KHÔNG TỒN TẠI LỜI GIẢI DƯƠNG CỦA MỘT SỐ BÀI TOÁN NEUMANN PHI TUYẾN TRONG NỬA KHÔNG GIAN TRÊN

Luận văn Thạc sỹ Toán học

Chuyên ngành : Toán Giải Tích
Mã số : 1.01.01

Người hướng dẫn : ***TS. Nguyễn Thành Long***
Đại học Khoa Học Tự Nhiên
Tp. Hồ Chí Minh.

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
2001

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.

Người hướng dẫn :

TS. Nguyễn Thành Long
Khoa Toán- tin học,
Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.

Người nhận xét1 :.............
....
....

Người nhận xét 2 :.............
....
....

Học viên cao học: ***Ngô Thanh Mỹ***
Trung tâm Tại Chức tỉnh Bình Thuận.

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội Đồng chấm luận án cấp Nhà Nước tại Trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.
vào lúc ......giờ......ngày .....tháng.....năm 2001

Có thể tìm hiểu luận án tại Phòng Sau Đại học, thư viện Trường Đại Học Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
2001

MỤC LỤC

Chương 1
TỔNG QUAN

Trong luận văn nầy, chúng tôi xét bài toán Neumann phi tuyến sau

(1.1) $$\Delta u = 0\ ,\ x \in R_+^n = \left\{ (x', x_n) : x' \in R^{n-1}\ ,\ x_n > 0 \right\},$$

(1.2) $$-u_{x_n}(x',0) = g(x', u(x',0))\ ,\ \ x' \in R^{n-1}.$$

Trong [1] các tác giả Bunkin, Galaktionov, Kirichenko, Kurdyumov, Samarsky (1988) đã nghiên cứu bài toán (1.1),(1.2) với n = 2 với phương trình Laplace (1.1) có dạng đối xứng trục

(1.3) $$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0,\quad r > 0\ ,\ z > 0,$$

và với điều kiện biên phi tuyến có dạng cụ thể như sau

(1.4) $$-u_z(r,0) = I_0 \exp(-r^2 / r_0^2) + u^{\alpha}(r,0),\quad r \geq 0,$$

trong đó I_0, r_0, α là các hằng số dương cho trước.

Bài toán (1.3),(1.4) làtrường hợp dừng của bài toán liên hệ với sự đốt cháy bởi bức xạ. Trong trường hợp $0 < \alpha \leq 2$ các tác giả trong [1] đã chứng minh rằng bài toán (1.3),(1.4) không có lời giải dương. Sau đó, kết quả nầy đã được mở rộng trong [7] bởi Long, Ruy (1995) cho điều kiện biên phi tuyến tổng quát

(1.5) $$-u_z(r,0) = g(r, u(r,0))\ ,\quad r \geq 0.$$

Trong [8] Ruy, Long, Bình (1997) đã xét bài toán (1.1),(1.2) với n = 3 và hàm g là liên tục, không giảm và bị chặn dưới bởi một hàm lũy thừa bậc α đối với biến thứ ba và chúng tôi đã chứng minh rằng nếu $0 < \alpha \leq 2$ thì bài toán như thế không có lời giải dương.

Các tác giả Bình, Diễm, Ruy, Long [2] (1998) và Bình, Long [3] (2000) đã xét bài toán (1.1),(1.2) với $n > 3$. Hàm số g : $R^{n-1} \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ là liên tục, không giảm đối với biến u, thỏa điều kiện

(1.6) $\exists\, \alpha \ge 0, \exists\, M > 0 : g(x', u) \ge M\, u^{\alpha}, \forall u \ge 0, \forall x' \in R^{n-1}$,

và một số điều kiện phụ.

Trong [5], [6] các tác giả đã chứng minh sự không tồn tại lời giải dương của bài toán (1.1), (1.2) với

(1.7) $$g(x', u) = u^{\alpha}.$$

Trong [5] Hu và Yin (1994) đã chứng minh với $1 \le \alpha < (n-1)/(n-2)$, $n \ge 3$ và trong [6] Hu (1994) đã chứng minh với $1 < \alpha < n/(n-2)$, $n \ge 3$. Cũng cần chú ý rằng hàm $g(x', u) = u^{\alpha}$ không thỏa các điều kiện trong các bài báo [2], [7], [8].

Trong luận văn nầy, chúng tôi xét tôi xét bài toán (1.1),(1.2) với $n \ge 3$. Hàm $g(x', u)$ liên tục thỏa điều kiện (1.6) mà (1.7) là một trường hợp riêng. Bằng cách xây dựng một dãy hàm thích hợp chúng tôi chứng minh rằng nếu, $0 \le \alpha \le (n-1)/(n-2)$, $n \ge 3$, bài toán (1.1), (1.2) không có lời giải liên tục dương.

Luận văn nầy ngoài phần kết luận và phần tài liệu tham khảo sẽ được trình bày trong 4 chương:

Trong chương 1, là phần tổng quan về bài toán, nguồn gốc về bài toán, một số kết quả đã có trước đó và nội dung cần trình bày trong các chương sau đó của luận văn.

Trong chương 2, là phần thiết lập phương trình tích phân phi tuyến theo giá trị biên xuất phát từ phương trình Laplace n - chiều trong nửa không gian trên liên kết với điều kiên biên Neumann.

Trong chương 3, chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại lời giải dương của bài toán (1.1), (1.2) cụ thể với n = 3.

Trong chương 4, chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại lời giải dương của bài toán (1.1), (1.2) với $n > 3$.

Phần kết luận nêu lên một số kết quả thu được trong luận văn và một số chú ý kèm theo.

Cuối cùng là phần tài liệu tham khảo.

CHƯƠNG 2

THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

Trong chương nầy, chúng ta thiết lập phương trình tích phân phi tuyến theo ẩn hàm là hàm giá trị biên xuất phát từ phương trình Laplace n - chiều trong nửa không gian trên liên kết với điều kiên biên Neumann.

Trước hết, ta đặt các ký hiệu sau:

$$R_+^n = \{\ x = (x', x_n) \in R^n : x' \in R^{n-1},\ x_n > 0\ \}$$
$$\overline{R_+^n} = \{\ x = (x', x_n) \in R^n : x' \in R^{n-1},\ x_n \geq 0\ \}$$
$$x \in R^n,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x', x_n),$$
$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = (|\,x'\,|^2 + x_n^2)^{1/2}.$$

Chúng ta xét bài toán: Tìm một hàm u có tính chất :

$$(S_1) \quad u \in C^2\left(R_+^n\right) \cap C\left(\overline{R_+^n}\right),\ u_{x_n} \in C\left(\overline{R_+^n}\right),$$

$$(S_2) \quad \lim_{R \to +\infty} \left(\sup_{|x| = R, x_n > 0} |u(x)| + R.\sup_{|x| = R, x_n > 0} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right| \right) = 0,$$

và thỏa phương trình Laplace:

$$(2.1) \qquad \Delta u = 0,\ x \in R_+^n = \left\{ (x', x_n) : x' \in R^{n-1},\ x_n > 0 \right\},$$

và điều kiện biên Neumann

$$(2.2) \qquad -u_{x_n}(x', 0) = g_1(x'),\quad x' \in R^{n-1},$$

trong đó $\frac{\partial .}{\partial \nu}$ chỉ đạo hàm theo hướng véctơ pháp tuyến đơn vị trên nửa mặt cầu $|x| = R,\ x_n > 0$, hướng ra ngoài và g_1 là hàm số cho trước liên tục trên R^{n-1}.

Ta xét hàm Green cho phương trình Laplace với điều kiện Neumann như sau:

$$(2.3)\quad \gamma(a,x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}\left[\,|a-x|^{2-n} + |a-\tilde{x}|^{2-n}\,\right],$$

trong đó

$x = (x', x_n) \in R^n$, $\tilde{x} = (x', -x_n)$, $a \in R^n_+$,

ω_n là diện tích của quả cầu đơn vị trong R^n.

Ta chú ý rằng với $a \in R^n_+$ cố định, hàm $\gamma(a, .)$ thuộc lớp C^∞ trong $R^n \setminus \{a, \tilde{a}\}$ và

$$(2.4)\quad \Delta\gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\gamma(a,x) = 0,\quad \forall x \neq a,\ x \neq \tilde{a},$$

$$(2.5)\quad \gamma_{x_n}(a, x', 0) = 0 \text{ trên } x_n = 0.$$

Ta cố định $a \in R^n_+$ và số thực $R > 0$. Chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$\overline{S_\varepsilon} = \{\, x \in R^n_+ : |x-a| \leq \varepsilon \,\} \subset R^n_+ \cap B_R \equiv \Omega_R$$

với $B_R \equiv \{\, x \in R^n : |x| < R \,\}$.

Áp dụng công thức Green trên miền $\Omega_R \setminus \overline{S_\varepsilon}$, ta viết được:

$$(2.6)\quad \int_{\Omega_R \setminus \overline{S_\varepsilon}} (\gamma\Delta u - u\Delta\gamma)\,dx = \int_{\partial\Omega_R} (\gamma u_\nu - u\gamma_\nu)\,dS - \int_{|x-a|=\varepsilon} (\gamma u_\nu - u\gamma_\nu)\,dS.$$

Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1: *Với giả thiết (S_1) ta có*

(2.7) $$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{|x-a|=\varepsilon} (\gamma u_\nu - u\gamma_\nu) dS = u(a).$$

Chứng minh: Ta viết hàm Green $\gamma(a,x)$ dưới dạng:

(2.8) $$\gamma(a,x) = s(a,x) + \Phi(a,x),$$

$$s(a,x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} |a-x|^{2-n},$$

$$\Phi(a,x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} |a-\widetilde{x}|^{2-n} = s(a,\widetilde{x}).$$

Ta có:

(2.9) $$\int_{|x-a|=\varepsilon} (\gamma u_\nu - u\gamma_\nu) dS = \int_{|x-a|=\varepsilon} (\Phi u_\nu - u\Phi_\nu) dS + \int_{|x-a|=\varepsilon} (s u_\nu - u s_\nu) dS$$

$$= I_1(a,\varepsilon) + I_2(a,\varepsilon).$$

* Do giả thiết (S_1), hàm $x \mapsto \Phi(a,x)u_\nu(a,x) - u(a,x)\Phi_\nu(a,x)$ liên tục trên $\overline{S_\varepsilon}$ nên

(2.10) $$\lim_{\varepsilon \to 0_+} I_1(a,\varepsilon) = 0.$$

* Đổi biến $x = a + \varepsilon y$, chuyển tích phân mặt trên mặt cầu tâm a bán kính ε thành tích phân mặt trên mặt cầu đơn vị tâm O.

(2.11) $$\int_{|x-a|=\varepsilon} s u_\nu dS = \varepsilon^{n-1} \int_{|y|=1} s(a, a+\varepsilon y) u_\nu(a+\varepsilon y) d\omega$$

$$= \frac{\varepsilon}{(n-2)\omega_n} \int_{|y|=1} u_\nu(a+\varepsilon y) d\omega \to 0 \text{ khi } \varepsilon \to 0_+.$$

(2.12) $$-\int_{|x-a|=\varepsilon} u s_\nu dS = -\varepsilon^{n-1} \int_{|y|=1} u(a+\varepsilon y) s_\nu(a, a+\varepsilon y) d\omega$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} u(a+\varepsilon y) d\omega \to u(a) \text{ khi } \varepsilon \to 0_+.$$

Vậy (2.11), (2.12) dẫn đến

(2.13) $$\lim_{\varepsilon \to 0_+} I_2(a,\varepsilon) = 0.$$

Từ (2.9), (2.10), (2.13) ta suy ra bổ đề 1 được chứng minh.

Từ (2.6) , thay $\Delta\gamma = 0$, $\forall x \neq a$ và $\Delta u = 0$, sau đó cho $\varepsilon \to 0_+$ ta thu được

(2.14) $$u(a) = \int_{\partial\Omega_R} (\gamma u_\nu - u\gamma_\nu) dS \quad ,\forall a \in \Omega_R.$$

Bổ đề 1 được chứng minh xong.

Bổ đề 2: *Giả sử u là lời giải của (2.1), (2.2) thỏa các điều kiện* $(S_1), (S_2)$, *ta có*

(2.15) $$\lim_{R\to+\infty} \int_{\partial\Omega_R} (\gamma\, u_\nu - u\gamma_\nu)\, dS = -\int_{R^{n-1}} \gamma\, u_{x_n} dx'.$$

Chứng minh:

Ta có

$\partial\Omega_R = D_R \cup S_R$,
$D_R = \{(x',0) : |x'| \le R\}$,
$S_R = \{x = (x', x_n) : |x| = R, x_n > 0\}$.

Ta viết

(2.16) $$\int_{\partial\Omega_R} (\gamma\, u_\nu - u\gamma_\nu)\, dS = \int_{D_R} (\gamma\, u_\nu - u\gamma_\nu)\, dS + \int_{S_R} (\gamma\, u_\nu - u\gamma_\nu)\, dS.$$

Ta sẽ chứng minh rằng:

(2.17) $$\lim_{R\to+\infty} \int_{D_R} (\gamma\, u_\nu - u\gamma_\nu)\, dS = -\int_{R^{n-1}} \gamma\, u_{x_n} dx',$$

(2.18) $$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} (\gamma\, u_\nu - u\gamma_\nu)\, dS = 0.$$

Chứng minh (2.17)

Trên D_R: $\nu = (0,0,...,-1)$, $u_\nu = -u_{x_n}$

*

$$s_{x_n}(a;x',x_n) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}(2-n)\left|a-x\right|^{1-n}\ \frac{x_n - a_n}{\left|a-x\right|} = \frac{-1}{\omega_n}\ \frac{x_n - a_n}{\left|a-x\right|^n}.$$

Tương tự

$$\Phi_{x_n}(a;x',x_n) = \frac{-1}{\omega_n}\ \frac{x_n + a_n}{\left|a-\tilde{x}\right|^n}.\gamma(a,x) = s(a,x) + \Phi(a,x),$$

Do đó:

$$\gamma_{x_n}(a;x',0) = s_{x_n}(a;x',0) + \Phi_{x_n}(a;x',0) = 0,$$

hay

(2.19) $$\gamma_\nu(a;x)\big|_{D_R} = 0.$$

(2.20) $$\gamma(a;x)\big|_{D_R} = \frac{2}{(n-2)\omega_n}\times\frac{1}{\left(\left|a'-x'\right|^2 + a_n^2\right)^{(n-2)/2}}.$$

Từ (2.19) và (2.20) dẫn đến

(2.21) $$\lim_{R\to+\infty}\int_{D_R}(\gamma\, u_\nu - u\gamma_\nu)\,dS = \lim_{R\to+\infty}\int_{D_R}\gamma\, u_\nu\, dS.$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int_{D_R}\gamma\, u_\nu\, dx' = -\lim_{R\to+\infty}\int_{D_R}\gamma\ u_{x_n}dx' = -\int_{R^{n-1}}\gamma\, u_{x_n}dx'.$$

(2.17) được chứng minh.

<u>Chứng minh (2.18)</u>

Trước hết ta đánh giá các tích phân trên S_R:

(i) Đánh giá tích phân $\int_{S_R}\gamma\, u_\nu\, dS$.

* Trên S_R ta có

(2.22) $$0 \le \gamma(a;x) \le \frac{2}{(n-2)\omega_n}\times\frac{1}{\left(R-\left|a\right|\right)^{n-2}},\ \forall x\in S_R.$$

Do đó

$$(2.23)\qquad \left|\int_{S_R}\gamma\, u_\nu\, dS\right| \le \frac{2}{(n-2)\omega_n}\times\frac{1}{\left(R-|a|\right)^{n-2}}\int_{S_R}|u_\nu|dS$$

$$= \frac{2}{(n-2)\omega_n}\times\frac{1}{\left(R-|a|\right)^{n-2}}\int_{|y|=1}|u_\nu(R\,y)|\,R^{n-1}d\omega$$

$$\le \frac{2}{(n-2)\omega_n}\times\frac{R^{n-1}}{\left(R-|a|\right)^{n-2}}\times\sup_{x\in S_R}|u_\nu(x)|\,\frac{\omega_n}{2}$$

$$= \frac{R^{n-1}}{(n-2)\left(R-|a|\right)^{n-2}}\times\sup_{x\in S_R}|u_\nu(x)|.$$

(ii) Đánh giá tích phân $\int_{S_R} u\gamma_\nu\, dS$.

Ta có

$$(2.24)\qquad \gamma_\nu = \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{x_i}\nu_i = \sum_{i=1}^{n}(s_{x_i}+\Phi_{x_i})\nu_i$$

$$\nu = \frac{x}{R}.$$

Ta có:

$$(2.25)\qquad s_{x_i}(a;x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}(2-n)|a-x|^{1-n}\,\frac{x_i-a_i}{|a-x|} = \frac{-1}{\omega_n}\,\frac{x_i-a_i}{|a-x|^n},$$

$1\le i\le n$.

$$(2.26)\qquad \Phi_{x_i}(a;x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}(2-n)|a-\tilde{x}|^{1-n}\,\frac{x_i-a_i}{|a-\tilde{x}|} = \frac{-1}{\omega_n}\,\frac{x_i-a_i}{|a-\tilde{x}|^n},$$

$1\le i\le n-1$,

(2.27) $\Phi_{x_n}(a;x',x_n) = \dfrac{-1}{\omega_n}\ \dfrac{x_n + a_n}{|\,a - \widetilde{x}\,|^n}$.

Chú ý rằng:

$\forall x \in S_R$, $|x| = |\widetilde{x}| = R$, $x_n \geq 0$:

$$|x-a| \geq |x| - |a| = R - |a|,\ \ |\widetilde{x} - a| \geq |\widetilde{x}| - |a| = R - |a|.$$

(2.28)
$$\left|s_{x_i}(a;x)\right| \leq \frac{1}{\omega_n}\ \frac{|x_i - a_i|}{|\,a-x\,|^n} \leq \frac{1}{\omega_n}\ \frac{1}{|\,a-x\,|^{n-1}}$$
$$\leq \frac{1}{\omega_n}\ \frac{1}{\left(|x| - |\,a\,|\right)^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n}\ \frac{1}{\left(R - |\,a\,|\right)^{n-1}},\ 1 \leq i \leq n.$$

Tương tự:

(2.29)
$$\left|\Phi_{x_i}(a;x)\right| \leq \frac{1}{\omega_n}\ \frac{|x_i - a_i|}{|\,a-\widetilde{x}\,|^n} \leq \frac{1}{\omega_n}\ \frac{1}{|\,a-\widetilde{x}\,|^{n-1}}$$
$$\leq \frac{1}{\omega_n}\ \frac{1}{\left(|\widetilde{x}| - |\,a\,|\right)^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n}\ \frac{1}{\left(R - |\,a\,|\right)^{n-1}},\ 1 \leq i \leq n-1,$$

(2.30)
$$\left|\Phi_{x_n}(a;x)\right| = \frac{1}{\omega_n}\ \frac{x_n + a_n}{|\,a-\widetilde{x}\,|^n} \leq \frac{1}{\omega_n}\ \frac{1}{|\,a-\widetilde{x}\,|^{n-1}} \leq \frac{1}{\omega_n}\ \frac{1}{\left(R - |\,a\,|\right)^{n-1}}.$$

Ta suy từ (2.24),(2.28),(2.29),(2.30) rằng:

(2.31)
$$|\gamma_\nu| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(|\,s_{x_i}| + |\,\Phi_{x_i}|\right)|\nu_i| \leq \frac{2n}{\omega_n}\ \frac{1}{\left(R - |\,a\,|\right)^{n-1}},\ \forall x \in S_R.$$

-10-

Do đó:

(2.32)
$$\left|\int_{S_R} u\gamma_\nu\, dS\right| \leq \frac{2n}{\omega_n} \times \frac{1}{\left(R - |\,a\,|\right)^{n-1}} \sup_{x \in S_R}|\,u(x)| \int_{S_R} dS$$
$$\leq \frac{2n}{\omega_n} \times \frac{1}{\left(R - |\,a\,|\right)^{n-1}} \sup_{x \in S_R}|\,u(x)|\ R^{n-1}\,\frac{\omega_n}{2}$$

$$=\frac{nR^{n-1}}{\left(R-|\,a\,|\right)^{n-1}}\sup_{x\in S_R}|u(x)| \quad .$$

Ta suy từ (2.23), (2.32) rằng:

$$(2.33)\qquad \left|\int_{S_R}(\gamma\, u_\nu - u\gamma_\nu)\,dS\right| \le \frac{R^{n-1}}{(n-2)\left(R-|\,a\,|\right)^{n-2}}\times\sup_{x\in S_R}|\,u_\nu(x)|$$

$$+\frac{nR^{n-1}}{\left(R-|\,a\,|\right)^{n-1}}\sup_{x\in S_R}|\,u(x)| \quad .$$

Sử dụng giả thiết (S_2), từ (2.33) ta suy ra $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{S_R}(\gamma\, u_\nu - u\gamma_\nu)\,dS = 0$.

Do đó (2.18) được chứng minh.

Vậy bổ đề 2 được chứng minh xong.

Kết quả sau đây được suy ra từ (2.14) và Bổ đề 2.

Bổ đề 3: *Giả sử u là lời giải của (2.1), (2.2) thỏa các điều kiện (S_1), (S_2), ta có*

$$(2.34)\qquad u(a) = -\int_{R^{n-1}}\gamma\, u_{x_n}\,dx' = \int_{R^{n-1}}\gamma\,(a\,;x',0)g_1(x')dx'\,,\forall a\in R_+^n\,.$$

Ta có định lý sau:

-11-

Định lý 1: *Nếu lời giải u của bài toán (1.1), (1.2) với g : $R^{n-1}\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ là hàm liên tục thỏa các tính chất (S_1), (S_2), khi đó u là lời giải của phương trình tích phân phi tuyến sau:*

$$(2.35)\qquad u(a',a_n) = \frac{2}{(n-2)\omega_n}\int_{R^{n-1}}\frac{g(x',u(x',0))\;dx'}{\left(|x'-a'|^2+a_n^2\right)^{(n-2)/2}}\,,$$

$$\forall(a',a_n)\in R_+^n\,.$$

CHƯƠNG 3

SỰ KHÔNG TỒN TẠI LỜI GIẢI DƯƠNG CỦA BÀI TOÁN VỚI N = 3

Chúng tôi xét bài toán (1.1),(1.2) cụ thể với n = 3 như sau:

(3.1) $$\Delta u = 0\ ,\ (x,y,z) \in R_+^3 = \left\{ (x,y,z) \in R^3\ ,\ z > 0 \right\},$$

(3.2) $$-u_z(x,y,0) = g(x,y,u(x,y,0))\ ,\ (x,y) \in R^2 .$$

với g : $R^2 \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ thỏa điều kiện:

(G_1) g làhàm liên tục,

(G_2) Tồn tại hai hằng số $M > 0$, $\alpha \geq 0$ sao cho :

$$g(x,y,u) \geq M\, u^{\alpha}\ ,\ \forall x,y \in R, \forall u \geq 0 .$$

Các tính chất $(S_1),(S_2)$ được cụ thể lại như sau:

(S_1^*) $u \in C^2(R_+^3) \cap C(\overline{R_+^3}), u_z \in C(\overline{R_+^3})$,

(S_2^*) (i) $\lim\limits_{R \to +\infty} \sup\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2,\ z>0} |u(x,y,z)| = 0$,

(ii)

$$\lim_{R \to +\infty} \sup_{x^2+y^2+z^2=R^2,\ z>0} \left| x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) \right| = 0 .$$

Khi đó ta có định lý sau:

Định lý 2: *Nếu lời giải* u *của bài toán (3.1), (3.2) với* $g: R^2 \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *là hàm liên tục thỏa các tính chất* $(S_1^*), (S_2^*)$. *Khi đó* u *là lời giải của phương trình tích phân phi tuyến sau:*

$$(3.3)\quad u(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{R^2} \frac{g(\xi,\eta,u(\xi,\eta,0))}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\, d\xi\, d\eta\,,\ \forall (x,y,z) \in R_+^3.$$

Ta cũng giả sử rằng giá trị biên $u(x,y,0)$ của lời giải u của bài toán (3.1), (3.2) thỏa điều kiện:

(S_3^*) *Tích phân* $\displaystyle\iint_{R^2} \frac{g(\xi,\eta,u(\xi,\eta,0))}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta$ *tồn tại* $\forall (x,y) \in R^2$.

Ta phát biểu kết quả chính trong phần nầy như sau:

Định lý 3: *Giả sử rằng* g *thỏa các giả thiết* $(G_1), (G_2)$ *với* $0 < \alpha \le 2$. *Khi đó bài toán (3.1), (3.2) không có lời giải dương thỏa* $(S_1^*), (S_2^*), (S_3^*)$.

Chứng minh định lý 3:

Bằng phương pháp phản chứng, giả sử rằng bài toán (3.1), (3.2) có lời giải dương $u = u(x,y,z)$ thỏa (S_1^*), (S_2^*), (S_3^*). Dùng định lý hội tụ bị chặn, cho $z \to 0_+$ trong phương trình tích phân (3.3), nhờ vào (S_3^*), ta thu được:

$$(3.4)\qquad u(x,y,0) = \frac{1}{2\pi}\iint_{R^2} \frac{g(\xi,\eta,u(\xi,\eta,0))}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta\,,\ \forall (x,y) \in R^2.$$

Ta đặt: $u(x,y,0) \equiv u(x,y)$. Khi đó, ta viết lại (3.4) như sau:

$$(3.5)\qquad u(x,y) = A[g(\xi,\eta,u(\xi,\eta))](x,y)$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\iint_{R^2} \frac{g(\xi,\eta,u(\xi,\eta))}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta\,,\ \forall (x,y) \in R^2.$$

trong đó A là một toán tử tuyến tính xác định bằng công thức:

(3.6) $$A[v(\xi,\eta)](x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{R^2}\frac{v(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}},\ \forall(x,y)\in R^2.$$

Để chứng minh định lý 3, ta chỉ cần chứng minh rằng phương trình tích phân (3.5) không có lời giải dương liên tục.

Trước hết ta cần một số bất đẳng thức đánh giá sau đây:

Bổ đề 4. *Với mọi* $(x,y)\in R^2$ *ta có:*

(i) $A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2})^{-\alpha}](x,y)=+\infty$, *nếu* $0<\alpha\le 1$,

(ii) $A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2})^{-\alpha}](x,y)\ge \dfrac{1}{2(\alpha-1)(1+\sqrt{x^2+y^2})^{\alpha-1}}$,

nếu $\alpha>1$,

(iii) $A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2})^{-2}](x,y)\ge \dfrac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{4\sqrt{x^2+y^2}}$, *nếu* $\alpha=2$.

Chứng minh bổ đề 4:

(i) $0<\alpha\le 1$: Sử dụng bất đẳng thức sau đây

(3.7) $$\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\ge\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\times\frac{1}{1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}},$$

$\forall x,y,\xi,\eta\in R$,

và sau đó đổi biến số qua tọa độ cực, ta thu được

(3.8) $A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2})^{-\alpha}](x,y)$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\iint_{R^2} \frac{d\xi\, d\eta}{(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2})^{\alpha}(\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$\geq \int_0^{+\infty} \frac{rdr}{(1+r)^{\alpha}(r+\sqrt{x^2+y^2})} = +\infty .$$

(ii) $\alpha > 1$: Tương tự như (3.8), ta có

$$(3.9) \quad A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2})^{-\alpha}](x,y) \geq \int_0^{+\infty} \frac{rdr}{(1+r)^{\alpha}(r+\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$\geq \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{+\infty} \frac{rdr}{(1+r)^{\alpha}(r+\sqrt{x^2+y^2})} .$$

Từ bất đẳng thức sau

$$(3.10) \qquad \frac{r}{r+\sqrt{x^2+y^2}} \geq \frac{1}{2}, \qquad \forall r \geq \sqrt{x^2+y^2} ,$$

ta thu được từ (3.9) rằng

$$(3.11) \quad A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2})^{-\alpha}](x,y) \geq \frac{1}{2}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{+\infty} \frac{dr}{(1+r)^{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{2(\alpha-1)(1+\sqrt{x^2+y^2})^{\alpha-1}} .$$

(iii) $\alpha = 2$: Tương tự như (3.8), ta có

$$(3.12) \quad A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2})^{-2}](x,y) \geq \int_0^{+\infty} \frac{rdr}{(1+r)^{2}(r+\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$\geq \int_1^{+\infty} \frac{rdr}{(1+r)^{2}(r+\sqrt{x^2+y^2})} .$$

Sử dụng bất đẳng thức

(3.13) $$\frac{r}{(1+r)^2} \geq \frac{1}{4r}, \qquad \forall r \geq 1,$$

ta suy ra

(3.14) $$A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2})^{-2}](x,y) \geq \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r(r+\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x^2+y^2}} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\sqrt{x^2+y^2}}\right) dr$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x^2+y^2}} \times \ln\left(\frac{r}{r+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Bigg|_1^{+\infty}$$

$$= \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{4\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Bổ đề 4 được chứng minh.

Bây giờ, để tiếp tục chứng minh, ta giả sử rằng tồn tại $(x_0, y_0) \in R^2$ sao cho $u(x_0, y_0) > 0$. Do u liên tục, khi đó tồn tại $r_0 > 0$ sao cho

(3.15) $$u(x,y) > \frac{1}{2}u(x_0, y_0) \equiv m_0,$$

$$\forall (x,y) \in B_{r_0}(x_0, y_0) = \{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r_0^2\}.$$

Ta suy từ (G_2), (3.5), (3.15) và tính đơn điệu của toán tử A, rằng

(3.16) $$u(x,y) = A[g(\xi,\eta,u(\xi,\eta))](x,y) \geq A[M\, u^{\alpha}(\xi,\eta)](x,y)$$

$$= \frac{M}{2\pi} \iint_{R^2} \frac{u^{\alpha}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

$$\geq \frac{M(m_0)^{\alpha}}{2\pi} \iint_{B_{r_0}(x_0,y_0)} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

$\forall (x,y) \in R^2$.

Sử dụng bất đẳng thức sau đây

$$(3.17)\qquad \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \le \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

$$\le (1+\sqrt{x^2+y^2})(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2})$$

$$\le (1+\sqrt{x^2+y^2})(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2}+\sqrt{(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2})$$

$$\le (1+\sqrt{x^2+y^2})(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2}+r_0^2),$$

$\forall x, y \in R$, $\forall(\xi,\eta) \in B_{r_0}(x_0,y_0)$, ta thu được:

$$(3.18)\qquad \frac{M(m_0)^\alpha}{2\pi} \iint\limits_{B_{r_0}(x_0,y_0)} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$

$$\ge \frac{\dfrac{M(m_0)^\alpha}{2\pi}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2}+r_0^2)} \iint\limits_{B_{r_0}(x_0,y_0)} d\xi\, d\eta$$

$$\ge \frac{\dfrac{M(m_0)^\alpha}{2\pi}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2}+r_0^2)}\pi\, r_0^2$$

$$\ge \frac{\dfrac{M(m_0)^\alpha}{2\pi}\pi\, r_0^2}{(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2}+r_0^2)} \times \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2})}.$$

Ta suy từ (3.16), (3.18) rằng

$$(3.19)\qquad u(x,y) \ge \frac{m_1}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \equiv u_1(x,y) \qquad \forall x, y \in R,$$

với $m_1 = \dfrac{M\, m_0^\alpha r_0^2}{2(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2}+r_0^2)}$.

Ta xét các trường hợp khác nhau của α.

Trường hợp 1: $0 < \alpha \le 1$.

Ta thu được từ (G_2), (3.5), (3.19) và tính đơn điệu của toán tử A, rằng

(3.20) $$\begin{aligned} u(x,y) &= A[g(\xi,\eta,u(\xi,\eta))](x,y) \ge A[M\,u^{\alpha}(\xi,\eta)](x,y) \\ &\ge A[M\,u_1^{\alpha}(\xi,\eta)](x,y) \\ &= M\,m_1^{\alpha} A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,)^{-\alpha}](x,y) = +\infty, \end{aligned}$$

do bổ đề 4,(i). Đây là điều vô lý.

Trường hợp 2: $1 < \alpha < 2$.

Áp dụng bổ đề 4, (ii), ta thu được từ (G_2), (3.5), và tính đơn điệu của toán tử A, rằng

(3.21) $$\begin{aligned} u(x,y) &= A[g(\xi,\eta,u(\xi,\eta))](x,y) \ge A[M\,u^{\alpha}(\xi,\eta)](x,y) \\ &\ge A[M\,u_1^{\alpha}(\xi,\eta)](x,y) \\ &= M\,m_1^{\alpha} A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,)^{-\alpha}](x,y) \\ &\ge \frac{M\,m_1^{\alpha}}{2(\alpha-1)(1+\sqrt{x^2+y^2}\,)^{\alpha-1}} \\ &= m_2(1+\sqrt{x^2+y^2}\,)^{-q_2} \equiv u_2(x,y), \end{aligned}$$

trong đó

(3.22) $$m_2 = \frac{M\,m_1^{\alpha}}{2(\alpha-1)}, \quad q_2 = \alpha - 1.$$

Bằng quy nạp ta giả sử rằng

(3.23) $$u(x,y) \ge u_{k-1}(x,y) \equiv m_{k-1}(1+\sqrt{x^2+y^2}\,)^{-q_{k-1}}, \ \forall x,y \in R.$$

Nếu $\alpha\, q_{k-1} > 1$, khi đó, sử dụng bổ đề 4, (ii), ta thu được từ (G_2), (3.5), (3.23) rằng

$$(3.24) \qquad u(x,y) = A[g(\xi,\eta,u(\xi,\eta))](x,y) \geq A[M\, u^{\alpha}(\xi,\eta)](x,y)$$

$$\geq A[M\, u_{k-1}^{\alpha}(\xi,\eta)](x,y)$$

$$= M\, m_{k-1}^{\alpha} A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,)^{-\alpha\, q_{k-1}}](x,y)$$

$$\geq \frac{M\, m_{k-1}^{\alpha}}{2(\alpha\, q_{k-1}-1)(1+\sqrt{x^2+y^2}\,)^{\alpha\, q_{k-1}-1}}$$

$$= m_k(1+\sqrt{x^2+y^2}\,)^{-q_k} \equiv u_k(x,y),$$

trong đó các dãy số $\{q_k\},\{m_k\}$ được xác định bởi công thức qui nạp:

$$(3.25) \qquad q_k = \alpha\, q_{k-1} - 1,\, k = 2,3,\ldots;\ \ q_1 = 1,$$

$$(3.26) \qquad m_k = \frac{M\, m_{k-1}^{\alpha}}{2q_k},\ \ k = 2,3,\ldots$$

Từ (3.25), (3.26) ta thu được

$$(3.27) \qquad q_k = \frac{1-(2-\alpha)\alpha^{k-1}}{\alpha-1},\ m_k = \frac{M\, m_{k-1}^{\alpha}}{2q_k},\ \ \forall k = 2,3,\ldots.$$

Do $1 < \alpha < 2$, ta có thể chọn được số tự nhiên k_0, phụ thuộc vào α, sao cho:

$$(3.28) \qquad \frac{-\ln(2-\alpha)}{\ln} \leq k_0 < 1 - \frac{\ln(2-\alpha)}{\ln}.$$

Với số tự nhiên k_0 được chọn, ta có

(3.29) $\quad 0 < \alpha\, q_{k_0} \le 1.$

Sử dụng bổ đề 4, (i), ta thu được từ (G_2), (3.5), (3.24), (3.29), rằng

(3.30)
$$\begin{aligned} u(x,y) &= A[g(\xi,\eta,u(\xi,\eta))](x,y) \ge A[M\,u^{\alpha}(\xi,\eta)](x,y) \\ &\ge A[M\,u_{k_0}^{\alpha}(\xi,\eta)](x,y) \\ &= M\,m_{k_0}^{\alpha} A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,)^{-\alpha\, q_{k_0}}](x,y) = +\infty . \end{aligned}$$

Định lý 3 được chứng minh cho trường hợp 2.

Trường hợp 3: $\alpha = 2$.

Với $\alpha = 2$, áp dụng bổ đề 4, (iii), ta thu được từ (G_2), (3.5), và tính đơn điệu của toán tử A, rằng

(3.31)
$$\begin{aligned} u(x,y) &= A[g(\xi,\eta,u(\xi,\eta))](x,y) \ge A[M\,u^{2}(\xi,\eta)](x,y) \\ &\ge A[M\,u_1^{2}(\xi,\eta)](x,y) \\ &= M\,m_1^{2} A[(1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,)^{-2}](x,y) \\ &\ge M\,m_1^2\,\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2}\,)}{4\sqrt{x^2+y^2}} . \end{aligned}$$

Ta suy ra từ (3.31) rằng

(3.32) $\quad u(x,y) \ge v_2(x,y)$

$$= \begin{cases} \dfrac{C_2}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right) \right)^{p_2}, & x^2+y^2 \ge 1, \\ 0\,, & x^2+y^2 \le 1. \end{cases}$$

trong đó

(3.33) $\quad p_2 = 1\ ,\ C_2 = \frac{1}{4} M m_1^2\ .$

Giả sử rằng:

(3.34)
$$u(x,y) \geq v_{k-1}(x,y)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{C_{k-1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right) \right)^{p_{k-1}}, & x^2+y^2 \geq 1, \\ 0\ , & x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$$

trong đó p_{k-1}, C_{k-1} là các hằng số dương.

Sử dụng giả thiết (G_2) và (3.5), (3.34), ta có:

(3.35)
$$u(x,y) = A[g(\xi,\eta,u(\xi,\eta))](x,y) \geq A[M\, u^2(\xi,\eta)](x,y)$$
$$\geq A[M\, v_{k-1}^2(\xi,\eta)](x,y)$$
$$= \frac{M}{2\pi} \iint_{R^2} \frac{v_{k-1}^2(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$
$$\geq \frac{M}{2\pi} \iint_{\xi^2+\eta^2\geq 1} \frac{v_{k-1}^2(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$
$$\geq \frac{M C_{k-1}^2}{2\pi} \iint_{\xi^2+\eta^2\geq 1} \frac{\left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}\right) \right)^{2p_{k-1}} d\xi\, d\eta}{(\xi^2+\eta^2)\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$
$$\geq \frac{M C_{k-1}^2}{2\pi} \iint_{\xi^2+\eta^2\geq 1} \frac{\left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}\right) \right)^{2p_{k-1}} d\xi\, d\eta}{(\xi^2+\eta^2)\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

$$\geq MC_{k-1}^2 \int_1^{+\infty} \frac{\left(\ln(\frac{1+r}{2})\right)^{2p_{k-1}} dr}{r(r+\sqrt{x^2+y^2})} \quad .$$

Ta xét trường hợp $x^2 + y^2 \geq 1$, ta có

$$(3.36) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\left(\ln(\frac{1+r}{2})\right)^{2p_{k-1}} dr}{r(r+\sqrt{x^2+y^2})} \geq \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{+\infty} \frac{\left(\ln(\frac{1+r}{2})\right)^{2p_{k-1}} dr}{r(r+\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$\geq \left(\ln(\frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{2})\right)^{2p_{k-1}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{+\infty} \frac{dr}{r(r+\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$= \left(\ln(\frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{2})\right)^{2p_{k-1}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\sqrt{x^2+y^2}}\right) dr$$

$$= \left(\ln(\frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{2})\right)^{2p_{k-1}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \ln \frac{r}{r+\sqrt{x^2+y^2}} \Bigg|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{+\infty}$$

$$= \left(\ln(\frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{2})\right)^{2p_{k-1}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad .$$

Với $x^2 + y^2 \geq 1$, ta suy từ (3.35), (3.36) rằng

$$(3.37) \qquad u(x,y) \geq MC_{k-1}^2 \int_1^{+\infty} \frac{\left(\ln(\frac{1+r}{2})\right)^{2p_{k-1}} dr}{r(r+\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$\geq \frac{MC_{k-1}^2 \ln 2}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\ln(\frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{2})\right)^{2p_{k-1}} \quad .$$

Từ (3.35), (3.37) , ta thu được

(3.38) $u(x,y) \geq v_k(x,y)$

$$= \begin{cases} \dfrac{C_k}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\ln(\dfrac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{2}) \right)^{p_k}, & x^2+y^2 \geq 1, \\ 0\,, & x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$$

trong đó p_k, C_k là các hằng số dương xác định bởi các công thức qui nạp.

(3.39) $p_k = 2p_{k-1}$, $C_k = MC_{k-1}^2 \ln 2$, $k = 3,4,\ldots$.

Từ (3.33),(3.39) ta có

(3.40) $p_k = 2^{k-2}$, $\quad C_k = \dfrac{1}{\ln 2} M^{2^{k-1}-1} (\dfrac{1}{2} m_1 \sqrt{\ln 2})^{2^{k-1}}$.

Nhờ vào (3.40) ta viết lại (3.38) với $x^2+y^2 \geq 1$ như sau

(3.41) $u(x,y) \geq v_k(x,y)$

$$= \frac{1}{M\sqrt{x^2+y^2}\,\ln 2} \left(\frac{1}{4} M^2 m_1^2 \ln 2 \ln(\frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{2}) \right)^{2^{k-2}}.$$

Chọn x, y sao cho $\dfrac{1}{4} M^2 m_1^2 \ln 2 \ln(\dfrac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{2}) > 1$ hay

(3.42) $\sqrt{x^2+y^2} > -1 + 2\exp(\dfrac{4}{M^2 m_1^2 \ln 2}) \equiv \rho_0$.

Khi đó ta có

(3.43) $u(x,y) \geq \lim\limits_{k \to +\infty} v_k(x,y) = +\infty$, $\sqrt{x^2+y^2} > \rho_0$.

Điều nầy vô lý. Định lý 3 được chứng minh cho trường hợp 3.

Tổ hợp các trường hợp 1-3 chúng thấy rằng định lý 3 được chứng minh.

<u>Chú thích 1</u>.

Kết quả của định lý 3 mạnh hơn kết quả trong [8] Ruy, Long, Bình. Thật vậy, tương ứng với cùng phương trình (3.1), (3.2), các giả thiết sau đây đã dùng trong [8] không cần thiết ở đây

(G_3) $g(x,y,u)$ *không giảm đối với biến thứ ba* ,i.e.,

$$(g(x,y,u)-g(x,y,v))(u-v)\geq 0\,,\ \forall x,y\in R\,,\ \forall u,v\geq 0\,.$$

(G_4) *Tích phân* $\displaystyle\iint_{R^2}\frac{g(x,y,0)\ dxdy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$ *tồn tại và dương.*

<u>Chú thích 2</u>. Chú ý rằng với $0<\alpha\leq 2$, hàm $g(x,y,u)=u^{\alpha}$ không giải quyết được trong [8] vì không thỏa giả thiết (G_4), trong khi đó chúng tôi đã giải được ví dụ nầy trong luận văn.

<u>Chú thích 3</u>.

Trường hợp $\alpha=2$, các tác giả Bunkin, Galaktionov, Kirichenko, Kurdyumov, Samarsky [1] có cho một đánh giá tương tự như (3.38) nhưng phức tạp hơn, mà ở đó v_k được cho dưới dạng của một chuỗi hàm.

<u>Chú thích 4</u>. Kết quả của định lý 3 không còn đúng với $\alpha>2$. Ta xét phản ví dụ sau đây với $\alpha=3$ và $g(x,y,u)=u^3$. Ta có g thỏa các giả thiết (G_1), (G_2). Khi đó hàm số

$$u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+1)^2}}$$

là lời giải dương của bài toán (3.1), (3.2) và thỏa $\left(S_1^*\right)$, $\left(S_2^*\right)$, $\left(S_3^*\right)$.

CHƯƠNG 4

SỰ KHÔNG TỒN TẠI LỜI GIẢI DƯƠNG VỚI TRƯỜNG HỢP N > 3

Trong phần nầy ta xét bài toán Neumann sau đây với $n > 3$:

Tìm một hàm u là lời giải của bài toán Neumann

(4.1) $$\Delta u = 0\ ,\ x \in R_+^n = \left\{ (x', x_n) : x' \in R^{n-1}\ ,\ x_n > 0 \right\},$$

(4.2) $$-u_{x_n}(x',0) = g(x', u(x',0))\ ,\ x' \in R^{n-1},$$

thỏa các tính chất:

(S_1) $u \in C^2(R_+^n) \cap C\left(\overline{R_+^n}\right)$, $u_{x_n} \in C\left(\overline{R_+^n}\right)$,

(S_2) $$\lim_{R \to +\infty} \left(\sup_{|x|=R, x_n>0} |u(x)| + R.\sup_{|x|=R, x_n>0} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right| \right) = 0,$$

Ở đây $g : R^{n-1} \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ cho trước thỏa các điều kiện sau:

(G_1) g là hàm liên tục,

(G_2) $\exists\ \alpha \geq 0$, $\exists$ $M > 0 : g(x',u) \geq M u^{\alpha}$, $\forall u \geq 0$, $\forall x' \in R^{n-1}$.

và một số điều kiện phụ sẽ đặt sau.

Khi đó, Nếu g là hàm liên tục và lời giải u bài toán (4.1),(4.2) có các tính chất (S_1), (S_2), thì u là nghiệm của phương trình tích phân sau đây

(4.3) $$u(x',x_n)=\frac{2}{(n-2)\omega_n}\int_{R^{n-1}}\frac{g\big(y',u(y',0)\big)\,dy'}{\Big(|\,y'-x'\,|^2+x_n^2\Big)^{(n-2)/2}},$$

$\forall(x',x_n)\in R_+^n$,

trong đó ω_n là diện tích của mặt cầu đơn vị trong R^n.

Đây là kết quả trong phần thiết lập phương trình tích phân (chương 2, định lý 1), trong đó có sự thay đổi các ký hiệu trong cách viết: $(a',a_n)\to x=(x',x_n)$, $(x',x_n)\to y=(y',y_n)$.

Ta cũng giả sử rằng giá trị biên $u(x',0)$ của lời giải u của bài toán (4.1), (4.2) thỏa tính chất:

(S_3) Tích phân $\displaystyle\int_{R^{n-1}}\frac{g\big(y',u(y',0)\big)\,dy'}{|\,y'-x'\,|^{n-2}}$ tồn tại, $\forall x'\in R^{n-1}$.

Khi đó, ta phát biểu kết quả chính trong phần nầy như sau:

Định lý 4. *Nếu* g *thỏa các giả thiết* $(G_1),(G_2)$ *với* $n>3$ *và* $0\le\alpha\le(n-1)/(n-2)$. *Khi đó, bài toán (4.1),(4.2) không có lời giải dương thỏa* $(S_1)-(S_3)$.

Chú thích 5.1. Kết quả nầy mạnh hơn kết quả trong [2], [8]. Thật vậy, ở cùng bài toán (4.1), (4.2), các giả thiết sau đây đã sử dụng trong các bài báo [2], [8] mà trong chương nầy không cần đến:

(G_3) $g(x',u)$ là hàm không giảm đối với biến u, i.e.,

$$\big(g(x',u)-g(x',v)\big)(u-v)\ge 0\quad\forall\ x\in R^N,\ \forall\,u\ge 0,\ \forall\,v\ge 0,$$

(G_4) Tích phân $\displaystyle\int_{R^{n-1}}\frac{g(x',0)\,dx'}{(1+|x'|)^{n-2}}$ tồn tại và dương.

Chứng minh định lý 4

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng bài toán (4.1), (4.2) có lời giải dương $u=u(x',x_n)$ thỏa các điều kiện $(S_1)-(S_3)$. Dùng định lý hội tụ bị chặn Lebesgue, cho $x_n \to 0_+$ trong phương trình tích phân (4.3), nhờ vào (S_3), ta thu được:

$$(4.4) \qquad u(x',0) = \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{R^{n-1}} \frac{g\big(y', u(y',0)\big)\, dy'}{|\ y' - x'\ |^{n-2}} \qquad \forall x' \in R^{n-1}.$$

Ta viết lại phương trình tích phân (4.3) bằng cách thay lại các ký hiệu $n-1 = N$, $x' = x$, $y' = y$, $u(x',0) = u(x')$, i.e.,

$$(4.5) \qquad u(x') = \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{R^{n-1}} \frac{g\big(y', u(y')\big)\, dy'}{|\ y' - x'\ |^{n-2}}, \quad \forall x' \in R^{n-1}.$$

hay

$$(4.6) \qquad u(x) = A[\, g(y, u(y))\,](x)\ , \quad \forall x \in R^N,$$

trong đó A là toán tử tích phân tuyến tính cho bởi công thức như sau

$$(4.7) \qquad A[v(y)](x) = b_N \int_{R^N} \frac{v(y)}{|y-x|^{N-1}}\, dy,$$

với $b_N = 2\big((N-1)\omega_{N+1}\big)^{-1}$.

Để chứng minh định lý 4, ta chỉ cần chứng minh rằng phương trình tích phân (4.6) không có lời giải liên tục dương.

Trước hết ta cần một số bất đẳng thức sau đây:

Bổ đề 5. Với mọi $x \in R^N$ ta có:

$$(4.8) \qquad A[\,(1+|y|\,)^{-q}\,](x) = +\infty, \ \text{nếu} \ \ 0 \le q \le 1,$$

$$(4.9) \ \ A[\,(1+|y|\,)^{-q}\,](x) \ge \frac{b_N \omega_N}{(q-1)2^{N-1}}(1+|x|)^{1-q}, \ \ \text{nếu} \ \ q > 1.$$

Chứng minh bổ đề 5.

Ta có từ công thức (4.7) rằng

$$(4.10)\qquad A[(1+|y|)^{-q}](x) = b_N \int_{R^N} \frac{(1+|y|)^{-q}}{|y-x|^{N-1}}\,dy$$

$$\geq b_N \int_{R^N} \frac{(1+|y|)^{-q}}{(|y|+|x|)^{N-1}}\,dy$$

$$\geq b_N \int_0^{+\infty} \frac{(1+r)^{-q}}{(r+|x|)^{N-1}}dr \int_{|y|=r} dS_r \;= J_q .$$

trong đó $\int_{|y|=r} dS_r$ là tích phân mặt trên mặt cầu, tâm O, bán kính r trong R^N.Tích phân nầy chính là diện tích của mặt trên mặt cầu $|y| = r$, tức là:

$$(4.11)\qquad \int_{|y|=r} dS_r \;= r^{N-1}\omega_N .$$

Vậy, ta suy từ (4.10), (4.11) rằng

$$(4.12)\qquad A[(1+|y|)^{-q}](x) \geq J_q = b_N\omega_N \int_0^{+\infty} \frac{(1+r)^{-q} r^{N-1}}{(r+|x|)^{N-1}}dr$$

$$= b_N\omega_N \int_0^{+\infty} (1+r)^{-q}\left(1+\frac{|x|}{r}\right)^{1-N} dr$$

$$\equiv b_N\omega_N I_q .$$

Tích phân I_q phân kỳ khi $q \leq 1$ và hội tụ khi $q > 1$. Hơn nữa, ta có

$$(4.13)\qquad I_q = \int_0^{+\infty} (1+r)^{-q}\left(1+\frac{|x|}{r}\right)^{1-N} dr$$

$$\geq \int_{|x|}^{+\infty} (1+r)^{-q}\left(1+\frac{|x|}{r}\right)^{1-N} dr$$

$$\geq \int_{|x|}^{+\infty} (1+r)^{-q} 2^{1-N} dr = \frac{2^{1-N}}{q-1}(1+|x|)^{1-q}.$$

Do đó bổ đề 5 được chứng minh.

Bây giờ, để tiếp tục chứng minh định lý 4, ta giả sử rằng tồn tại $x_0 \in R^N$ sao cho $u(x_0) > 0$. Vì u liên tục nên tồn tại $r_0 > 0$ sao cho:

(4.14) $$u(x) > \frac{1}{2}u(x_0) \quad \forall x \in R^N, |x - x_0| \leq r_0.$$

Ta suy từ giả thiết (G_2), (4.6), (4.14) rằng

(4.15) $$u(x) = A[g(y,u(y))](x) \geq MA[u^{\alpha}(y)](x)$$

$$\geq M b_N (\frac{1}{2}u(x_0))^{\alpha} \int_{|y-x_0|\leq r_0} \frac{dy}{|y-x|^{N-1}}, \quad \forall x \in R^N.$$

Sử dụng bất đẳng thức sau

(4.16) $$|y - x| \leq (1+|x|)(1+|x_0|+|y-x_0|)$$
$$\leq (1+|x|)(1+|x_0|+r_0), \qquad \forall x, y \in R^N, |y - x_0| \leq r_0,$$

ta suy từ (4.15), (4.16) rằng

(4.17) $$u(x) \geq M b_N (\frac{1}{2}u(x_0))^{\alpha} \int_{|y-x_0|\leq r_0} \frac{dy}{|y-x|^{N-1}}$$

$$\geq M b_N (\frac{1}{2}u(x_0))^{\alpha} \times \frac{1}{(1+|x_0|+r_0)^{N-1}} \times \frac{1}{(1+|x|)^{N-1}} \int_{|y-x_0|\leq r_0} dy$$

$$= M b_N (\frac{1}{2}u(x_0))^{\alpha} \times \frac{1}{(1+|x_0|+r_0)^{N-1}} \times \frac{1}{(1+|x|)^{N-1}} \frac{\omega_N r_0^N}{N},$$

$\forall x \in R^N$.

Ta viết lại

(4.18) $$u(x) \geq u_1(x) = m_1(1+|x|)^{-q_1}, \ \forall x \in R^N,$$

trong đó

(4.19) $$q_1 = N-1, \ m_1 = \frac{M\, b_N \omega_N r_0^N u^\alpha(x_0)}{N 2^\alpha (1+|x_0|+r_0)^{N-1}}.$$

Sử dụng một lần nữa đẳng thức (4.6), ta suy từ giả thiết (G_2), (4.18) rằng

(4.20) $$u(x) \geq M\, A[u^\alpha(y)](x) \geq \mathrm{M}\, m_1^\alpha A[(1+|y|)^{-\alpha q_1}](x) \ \ \forall x \in R^N.$$

Bây giờ ta xét các trường hợp khác nhau của giá trị α.

Trường hợp 1: $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{N-1}$.

Ta suy ra từ (4.8), (4.19), (4.20) với $q = \alpha\, q_1 = \alpha\, (N-1) \leq 1$, rằng

(4.21) $$u(x) = +\infty \ \ \forall x \in R^N.$$

Đó là điều vô lý.

Trường hợp 2: $\frac{1}{N-1} < \alpha < \frac{N}{N-1}$.

Sử dụng (4.9) với $q = \alpha\ q_1 = \alpha(N-1) > 1$, ta suy ra từ (4.20) rằng:

(4.22) $$u(x) \geq \mathrm{M}\ m_1^\alpha A[(1+|y|)^{-\alpha q_1}](x)$$

$$\geq M\, m_1^\alpha \frac{b_N \omega_N}{(\alpha q_1 - 1) 2^{N-1}} (1+|x|)^{1-\alpha q_1}, \ \ \forall x \in R^N.$$

hay

(4.23) $$u(x) \geq u_2(x) = m_2(1+|x|)^{-q_2}, \ \forall x \in R^N,$$

trong đó

(4.24) $\quad q_2 = \alpha\ q_1 - 1,\ \ m_2 = \dfrac{M\, b_N\, \omega_N\, m_1^{\alpha}}{2^{N-1} q_2}.$

Giả sử rằng

(4.25) $\quad u(x) \geq u_{k-1}(x) = m_{k-1}\,(1+|x|)^{-q_{k-1}},\ \ \forall x \in R^N.$

Nếu $\alpha\, q_{k-1} > 1$, khi đó ta dùng bất đẳng thức (4.9) với $q = \alpha\ \ q_{k-1} > 1$, ta thu được từ giả thiết (G_2), (4.6), (4.25), rằng

(4.26) $\quad u(x) \geq M\, A[u^{\alpha}(y)](x) \ \geq\ M\, m_{k-1}^{\alpha} A[(1+|y|)^{-\alpha\, q_{k-1}}](x)$

$$\geq M\, m_{k-1}^{\alpha} \frac{b_N \omega_N}{(\alpha q_{k-1} - 1)2^{N-1}} (1+|x|)^{1-\alpha q_{k-1}}$$

$$\geq\ m_k\,(1+|x|)^{-q_k}\ =\ u_k(x)\ \ \forall x \in R^N,$$

trong đó các dãy $\{q_k\}$, $\{m_k\}$ được xác định bởi các công thức qui nạp sau:

(4.27) $\quad q_k = \alpha\, q_{k-1} - 1,\ \ m_k = \dfrac{M\, b_N\, \omega_N\, m_{k-1}^{\alpha}}{2^{N-1} q_k}, \qquad$ k = 2,3,...

Từ (4.19), (4.27) ta thu được

(4.28)
$$q_k = \begin{cases} N-k\ , & \text{nếu } \alpha = 1, \\ (N-1)\alpha^{k-1} - \dfrac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}\ , & \text{nếu } \dfrac{1}{N-1} < \alpha < \dfrac{N}{N-1}\ ,\alpha \neq 1, \end{cases}$$

Ta suy từ (G_2), (4.6) và (4.26) rằng

(4.29) $\quad u(x) \geq\ M\, m_k^{\alpha}\ A[(1+|y|)^{-\alpha\, q_k}](x),\ \ \forall x \in R^N.$

Như vậy ta chỉ cần chọn một số tự nhiên k sao cho:

(4.30) $\quad 0 < \alpha\, q_k \leq 1$.

Do (4.28), ta chọn một số tự nhiên k như sau:

i) Nếu $\alpha = 1$, ta chọn $k = N-1$,

ii) Nếu $\dfrac{1}{N-1} < \alpha < \dfrac{N}{N-1}$ và $\alpha \neq 1$, ta chọn k thỏa $k_0 \leq k < k_0 + 1$,

với $k_0 = \dfrac{-1}{\ln\alpha} \ln[N - (N-1)\alpha\,]$.

Trường hợp 3: $\alpha = \dfrac{N}{N-1}$. Ta viết lại (4.20)

$$(4.31) \quad u(x) \geq M\,A[u^{\alpha}(y)](x) \geq \mathrm{M}\, m_1^{\alpha} A[(1+|y|)^{-\alpha q_1}](x)$$

$$= \mathrm{M}\, m_1^{\alpha} A[(1+|y|)^{-N}](x)\,,\ \forall x \in R^N .$$

Mặt khác, với mọi $x \in R^N$, $|x| \geq 1$, ta có.

$$(4.32) \qquad A[\,(1+|y|\,)^{-N}\,](x) = b_N \int_{R^N} \frac{(1+|y|\,)^{-N}}{|y-x|^{N-1}}\, dy$$

$$\geq b_N \int_{R^N} \frac{(1+|y|\,)^{-N}}{(\,|y|+|x|\,)^{N-1}}\, dy \;\; \geq b_N \int_0^{+\infty} \frac{(1+r)^{-N}}{(\,r+|x|\,)^{N-1}} dr \int_{|y|=r} dS_r$$

$$= b_N \omega_N \int_0^{+\infty} \frac{(1+r)^{-N} r^{N-1}}{(\,r+|x|\,)^{N-1}} dr \geq b_N \omega_N \int_1^{|x|} \frac{(1+r)^{-N} r^{N-1}}{(\,r+|x|\,)^{N-1}} dr$$

$$\geq b_N \omega_N \int_1^{|x|} \frac{r^{N-1} dr}{(1+r)^N (\,r+|x|\,)^{N-1}} .$$

Chú ý rằng với mọi r sao cho $1 \leq r \leq |x|$ ta có

(4.33) $\quad \left(\dfrac{r}{1+r}\right)^N \geq \dfrac{1}{2^N} \quad$ và $\quad \dfrac{1}{r+|x|} \geq \dfrac{1}{2|x|}$.

Vậy, ta có từ (4.33) rằng

(4.34) $$\int_1^{|x|} \frac{r^{N-1}dr}{(1+r)^N(\, r+|x|\,)^{N-1}} \geq \frac{1}{2^N}\frac{1}{(\,2|x|\,)^{N-2}}\int_1^{|x|}\frac{dr}{r(\,r+|x|\,)}$$

$$= \frac{1}{4^{N-1}} \times \frac{1}{|x|^{\,N-1}} \times \ln\left(\frac{1+|x|}{2}\right),\ \forall x \in R^N,\ |x| \geq 1.$$

Từ (4.31), (4.32) , (4.34) ta suy ra rằng

(4.35) $$u(x) \geq v_2(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ \dfrac{C_2}{|x|^{N-1}}\left(\ln\dfrac{1+|x|}{2}\right)^{p_2}, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

với

(4.36) $$p_2 = 1,\ \ C_2 = \frac{Mb_N\omega_N m_1^\alpha}{4^{N-1}}.$$

Giả sử rằng

(4.37) $$u(x) \geq v_{k-1}(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ \dfrac{C_{k-1}}{|x|^{N-1}}\left(\ln\dfrac{1+|x|}{2}\right)^{p_{k-1}}, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

trong đó p_{k-1}, C_{k-1} là các hằng số dương.

Sử dụng giả thiết (G_2) và (4.6), (4.37), ta suy ra rằng

(4.38) $\quad u(x) \geq M\, A[u^\alpha(y)](x)$

$$\geq M\, A[v_{k-1}^{\alpha}(y)](x) = M\, b_N \int_{R^N} \frac{v_{k-1}^{\alpha}(y)}{|y-x|^{N-1}}\, dy$$

$$\geq M\, b_N \int_{R^N} \frac{v_{k-1}^{\alpha}(y)}{(|y|+|x|)^{N-1}}\, dy \geq M\, b_N \int_{|y|\geq 1} \frac{v_{k-1}^{\alpha}(y)}{(|y|+|x|)^{N-1}}\, dy$$

$$= M\, b_N \int_1^{+\infty} dr \int_{|y|=r} \frac{v_{k-1}^{\alpha}(y)}{(r+|x|)^{N-1}}\, dS_r$$

$$= M\, b_N \omega_N C_{k-1}^{\alpha} \int_1^{+\infty} \frac{\left(\ln(\frac{1+r}{2})\right)^{\alpha\, p_{k-1}}}{r(r+|x|)^{N-1}}\, dr$$

Ta xét trường hợp $|x| \geq 1$, ta có

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left(\ln(\frac{1+r}{2})\right)^{\alpha\, p_{k-1}}}{r(r+|x|)^{N-1}}\, dr \geq \int_{|x|}^{+\infty} \frac{\left(\ln(\frac{1+r}{2})\right)^{\alpha\, p_{k-1}}}{r(r+|x|)^{N-1}}\, dr \tag{4.39}$$

$$\geq \left(\ln(\frac{1+|x|}{2})\right)^{\alpha\, p_{k-1}} \int_{|x|}^{+\infty} \frac{dr}{r(r+|x|)^{N-1}}$$

$$\geq \left(\ln(\frac{1+|x|}{2})\right)^{\alpha\, p_{k-1}} \int_{|x|}^{+\infty} \frac{dr}{r(r+r)^{N-1}}$$

$$= \frac{1}{(N-1)2^{N-1}|x|^{N-1}} \left(\ln\frac{1+|x|}{2}\right)^{\alpha\, p_{k-1}}.$$

Từ (4.38), (4.39), ta suy ra rằng

$$(4.40)\quad u(x) \geq v_k(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ \dfrac{C_k}{|x|^{N-1}} \left(\ln \dfrac{1+|x|}{2} \right)^{p_k}, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

trong đó p_k, C_k là các hằng số dương xác định bằng các công thứ qui nạp như sau:

$$(4.41)\qquad p_k = \alpha\, p_{k-1}\,, \quad C_k = \frac{M\, b_N \omega_N C_{k-1}^{\alpha}}{(N-1)2^{N-1}},\ k = 3,4,...$$

Ta tính ra công thức hiển của p_k, C_k nhờ vào (4.36), (4.41), như sau

$$(4.42)\qquad p_k = \alpha^{\,k-2}\,, \quad C_k = d_N^{1-N}\,(d_N^{N-1} C_2)^{\alpha^{k-2}},\ k = 3,4,...$$

trong đó

$$(4.43)\qquad d_N = \frac{M\, b_N \omega_N}{(N-1)2^{N-1}}.$$

Ta viết lại (4.40) với $|x| \geq 1$, ta có

$$(4.44)\quad u(x) \geq\ v_k(x) = d_N^{1-N} \frac{1}{|\,x\,|^{N-1}} \left(d_N^{N-1}\, C_2 \ln\left(\frac{1+|x|}{2}\right) \right)^{\alpha^{k-2}}.$$

Chọn x_0 sao cho

$$(4.45)\qquad d_N^{N-1} C_2 \ln\left(\frac{1+|x_0|}{2}\right) > 1,$$

Do (4.44), ta suy ra rằng $u(x_0) \geq \lim\limits_{k \to +\infty} v_k(x_0) = +\infty$.

Đây là điều vô lý.

Định lý 4 được chứng minh hoàn tất.

Chú thích 5.2.

i) Trong trường hợp của $g(x',u)$ chúng ta chưa có kết luận về trường hợp $\alpha > (n-1)/(n-2)$, $n \geq 3$. Tuy nhiên, khi $g(x',u) = u^{\alpha}$, $n \geq 3$, $(n-1)/(n-2) \leq \alpha < n/(n-2)$, B.Hu trong [6] đã chứng minh rằng bài toán (4.1), (4.2), (1.7) không có lời giải dương. Trong trường hợp " *giới hạn* $\alpha = n/(n-2)$ ", lời giải dương không tồn tại (Xem [4-6]).

ii) Với $\alpha = n/(n-2)$, các tác giả trong [4] đã mô tả tất cả các lời giải không âm không tầm thường $u \in C^2\left(R_+^n\right) \cap C\left(\overline{R_+^n}\right)$ của bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = a\,u^{(n+2)/(n-2)} & \text{trong} \quad R_+^n, \\ -u_{x_n}(x',0) = b\,u^{\alpha}(x',0) & \text{trên} \quad x_n = 0 \end{cases}$$

trong các trường hợp sau:

(j) $a > 0$ hay $a \leq 0, b > B = \sqrt{a(2-n)/n}$,

(jj) $a = b = 0$,

(jjj) $a = 0, b < 0$,

(4j) $a < 0, b = B$.

PHẦN KẾT LUẬN

Luận văn chủ yếu khảo sát sự không tồn tại lời giải dương của bài toán Neumann phi tuyến sau

(1) $\Delta u = 0\ ,\ x \in R_+^n = \left\{(x', x_n) : x' \in R^{n-1}\ ,\ x_n > 0\right\}$,

(2) $-u_{x_n}(x',0) = g(x', u(x',0))\ ,\ x' \in R^{n-1}$.

trong đó hàm số g : $R^{n-1} \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ là liên tục thỏa điều kiện

(3) $\exists\ \alpha \geq 0\ , \exists\ M > 0 :\ g(x',u) \geq M\ u^{\alpha}\ , \forall u \geq 0, \forall x' \in R^{n-1}$,

và một số điều kiện phụ.

Phần chính của luận văn nằm ở các chương 2, 3 và 4.

Trong chương 2, là phần thiết lập phương trình tích phân phi tuyến theo ẩn hàm là giá trị biên xuất phát từ phương trình Laplace n - chiều trong nửa không gian trên R_+^n liên kết với điều kiên biên Neumann.

Trong chương 3, chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại lời giải dương của bài toán (1),(2),(3) cụ thể với n = 3. Bằng cách xây dựng một dãy hàm thích hợp, chúng tôi thu được kết quả (định lý 3) mạnh hơn kết quả trong bài báo [8] của Ruy, Long, Bình. Bởi vì chúng tôi đã cải tiến lại phép chứng minh và bỏ qua các giả thiết (G_3) và (G_4) đã dùng trong [8]. Mặt khác, với $0 < \alpha \leq 2$, hàm $g(x,y,u) = u^{\alpha}$ không giải quyết được trong [8] vì không thỏa giả thiết (G_4), trong khi đó chúng tôi đã giải được ví dụ nầy trong luận văn.

Trong chương 4, chúng tôi xét bài toán (1),(2),(3) với $n > 3$. Hàm $g(x',u)$ liên tục thỏa điều kiện (3) và một số điều kiện phụ mà chứa trường hợp $g(x',u) = u^{\alpha}$ như là một trường hợp riêng. Trong trường hợp $0 \leq \alpha \leq (n-1)/(n-2)$, $n > 3$, bằng cách xây dựng một dãy hàm thích hợp chúng tôi chứng minh rằng bài toán(1),(2), (3) không có lời giải dương. Kết quả nầy cũng đã đã cải tiến kết quả trong bài báo [2] của Bình, Diễm, Ruy, Long (1998) do việc bỏ qua tính đơn điệu tăng của hàm $g(x',u)$ theo biến u và một số điều kiện tương tự khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]***F.V. Bunkin,V.A. Galaktionov, N.A. Kirichenko, S.P.Kurdyumov, A.A. Samarsky***, On a nonlinear boundary value problem of ignition by radiation, *J.Comp.Math.Phys*. **28** (1988), 549-559.(Russian).

[2] ***Dương Thị Thanh Bình,Trần Ngọc Diễm, Đinh Văn Ruy, Nguyễn Thành Long***, On a nonexistence of positive solution of a nonlinear Neumann problem in half-space R_+^n, *Demonstratio Math*. **31** (1998), 773-782.

[3] ***Dương Thị Thanh Bình, Nguyễn Thành Long***, On the nonexis-tence of positive solution of Laplace equation in half-space R_+^n with a nonlinear Neumann boundary condition, *Demonstratio Math*. **33** (2000), 365-372.

[4] ***M. Chipot, I. Shafrir, M. Fila***, On the solutions to some elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions, *Advances in Diff.Equ*. **1** (1996), 91-110.

[5] ***B. Hu, H.M. Yin***, The profile near blow-up time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition, *Transactions of AMS*. **346** (1994), 117-135.

[6] ***B. Hu****,* Nonexistence of a positive solution of the Laplace equation with a nonlinear boundary condition, *J. Diff. and Inte. Equ*. **7** (1994), 301-313.

[7] ***Nguyễn Thành Long, Đinh Văn Ruy***, On a nonexistence of positive solution of Laplace equation in upper half-space with Cauchy data, *Demonstratio Math*.**28** (1995), 921-927.

[8] ***Đinh Văn Ruy****,* ***Nguyễn Thành Long****,* ***Dương Thị Thanh Bình***, On a nonexistence of positive solution of Laplace equation in upper half-space, *Demonstratio Math*. **30** (1997), 7-14.