

CHƯƠNG I: CĂN BẬC HAI - CĂN BẬC BA

I. CĂN BẬC HAI - CĂN THỨC BẬC HAI

1. Căn bậc hai số học

Căn bậc hai của một số không âm a là số x sao cho $x^2 = a$.

• Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: Số dương kí hiệu là \sqrt{a} , số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

• Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$.

• Với số dương a , số \sqrt{a} là **căn bậc hai số học** của a . Số 0 cũng là căn bậc hai số học của 0

• Với hai số không âm a, b , ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2. Căn thức bậc hai

• Với A là một biểu thức đại số, ta gọi \sqrt{A} là **căn thức bậc hai** của A .

\sqrt{A} xác định (hay có nghĩa) khi A lấy giá trị không âm.

• $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

DẠNG 1: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ \sqrt{A} CÓ NGHĨA

Phương pháp:

• \sqrt{A} có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$ • $\sqrt{\frac{1}{A}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A > 0$

• $\frac{f(x)}{g(x)}$ có nghĩa khi $g(x) \neq 0$ • $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ có nghĩa khi $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ và $g(x) \neq 0$

• **Chú ý:** Nếu bài yêu cầu tìm TXĐ thì sau khi tìm được điều kiện x , các em biểu diễn dưới dạng tập hợp.

• Nếu $|f(x)| \geq a$ thì $f(x) \geq a$ hoặc $f(x) \leq -a$. (với $a > 0$)

• Nếu $|f(x)| \leq a$ thì $-a \leq f(x) \leq a$. (với $a > 0$)

Bài 1. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa: a) $\sqrt{-3x}$ b)

$\sqrt{4-2x}$ c) $\sqrt{-3x+2}$ d) $\sqrt{3x+1}$ e) $\sqrt{9x-2}$

f) $\sqrt{6x-1}$

Bài 2. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa: a) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$ b)

$$\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$$

$$\text{c) } \frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2} \quad \text{d) } \sqrt{\frac{1}{3-2x}}$$

$$\text{e) } \sqrt{\frac{4}{2x+3}}$$

$$\text{f) } \sqrt{\frac{-2}{x+1}}$$

Bài 3. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa: a) $\sqrt{x^2+1}$ b)

$$\sqrt{4x^2+3}$$

$$\text{c) } \sqrt{9x^2-6x+1} \quad \text{d) } \sqrt{-x^2+2x-1}$$

$$\text{e) } \sqrt{-|x+5|}$$

$$\text{f) } \sqrt{-2x^2-1}$$

Bài 4. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa: a) $\sqrt{4-x^2}$ b)

$$\sqrt{x^2-16}$$

$$\text{c) } \sqrt{x^2-3} \quad \text{d) } \sqrt{x^2-2x-3}$$

$$\text{e) } \sqrt{x(x+2)}$$

f)

$$\sqrt{x^2-5x+6}$$

Bài 5. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa: a) $\sqrt{|x|-1}$ b)

$$\sqrt{|x-1|-3}$$

$$\text{c) } \sqrt{4-|x|} \quad \text{d) } \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

$$\text{e) } \frac{1}{\sqrt{9-12x+4x^2}}$$

f)

$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}$$

DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Phương pháp: Các em dùng hằng đẳng thức 1 và 2 trong 7 hằng đẳng thức, biến đổi biểu thức trong căn đưa về dạng $\sqrt{A^2}$ rồi áp dụng công thức:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } -0,8\sqrt{(-0,125)^2}$$

$$\text{b) } \sqrt{(-2)^6}$$

$$\text{c) } \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$$

$$\text{d) } \sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$$

$$\text{e) } \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\text{f) } \sqrt{(0,1-\sqrt{0,1})^2}$$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$$

$$\text{b) } \sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$$

$$c) \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

$$d) \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

$$e) \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$$

$$f) \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} \quad b) \sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}} \quad c) \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$d) \sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} \quad e) \sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}} \quad f) \sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}}$$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}} \quad b) \sqrt{13+30\sqrt{2}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}} \quad c) (\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

$$d) \sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}} + \sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}} \quad e) \sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}} + \sqrt{1-\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}}$$

DẠNG 3: SO SÁNH CĂN BẬC 2

Phương pháp:

- So sánh với số).
- Bình phương hai vế .
- Đưa vào (đưa ra) ngoài dấu căn.
- Dựa vào tính chất: nếu $a > b \geq 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

BÀI TẬP: So sánh:

Bài 1: $\sqrt{22}$ và $\sqrt{27}$; 11 và $\sqrt{121}$; 7 và $\sqrt{50}$; 6 và $\sqrt{33}$;

Bài 2:

a) 2 và $\sqrt{147}$ b) $-3\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$ c) 21, $2\sqrt{7}$, $15\sqrt{3}$, $-\sqrt{123}$

d) $2\sqrt{15}$ và $\sqrt{59}$ e) $2\sqrt{2}-1$ và 2 f) 6 và $\sqrt{41}$ g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và 1 h) $-\frac{\sqrt{10}}{2}$ và $-2\sqrt{5}$

i) $\sqrt{6}-1$ và 3 j) $2\sqrt{5}-5\sqrt{2}$ và 1 k) $\frac{\sqrt{8}}{3}$ và $\frac{3}{4}$

l) $6\sqrt{\frac{1}{4}}$, $4\sqrt{\frac{1}{2}}$, $-\sqrt{132}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{15}{5}}$

m) $-2\sqrt{6}$ và $-\sqrt{23}$ n) $2\sqrt{6}-2$ và 3 o) $28\sqrt{2}$, $\sqrt{14}$, $2\sqrt{147}$, $36\sqrt{4}$

q) $\sqrt{9}$ và $\sqrt{25}-\sqrt{16}$ r) $\sqrt{111}-7$ và 4 p) -27 , $4\sqrt{3}$, $16\sqrt{5}$, $21\sqrt{2}$

DẠNG 4: RÚT GỌN BIỂU THỨC

Phương pháp: Các em dùng hằng đẳng thức 1 và 2 trong 7 hằng đẳng thức, biến đổi biểu thức trong căn đưa về dạng $\sqrt{A^2}$ rồi áp dụng công thức:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

Chú ý: Xét các trường hợp $A \geq 0$, $A < 0$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ ($x \leq 3$)

b) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2}$ ($-2 \leq x \leq 0$)

c) $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$ ($x > 1$)

d) $|x - 2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$ ($x < 2$)

Bài 2. * Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{1 - 4a + 4a^2} - 2a$ b) $B = x - 2y - \sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}$ c) $C = x^2 + \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$

d) $D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5}$ e) $E = \frac{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}}{x^2 - 2}$ f) $F = \sqrt{(x - 4)^2} + \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}$

Bài 3. Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}}$.

a) Với giá trị nào của x thì A có nghĩa?

b) Tính A nếu $x \geq \sqrt{2}$.

Bài 4. Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện: $xy + yz + zx = 1$. Tính:

$$A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

DẠNG 5: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp:

• $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$; • $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

• $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$

• $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

• $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$

• $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$

• $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B \text{ hay } A = -B$

• $|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

• Chú ý: $\sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B$; $|A| = A$ khi $A \geq 0$; $|a| = -A$ khi $A \leq 0$.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$

b) $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5$

c) $\sqrt{1 - 12x + 36x^2} = 5$

d) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2$

e) $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$

f) $\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} - x$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$

b) $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{3-x}$

c) $\sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{4x-3}$

$$d) \sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} \quad e) \sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x-3} \quad f) \sqrt{x^2-x} = \sqrt{3x-5}$$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x^2+x} = x \quad b) \sqrt{1-x^2} = x-1 \quad c) \sqrt{x^2-4x+3} = x-2$$

$$d) \sqrt{x^2-1} - x^2 + 1 = 0 \quad e) \sqrt{x^2-4} - x + 2 = 0 \quad f) \sqrt{1-2x^2} = x-1$$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x^2-2x+1} = x^2-1 \quad b) \sqrt{4x^2-4x+1} = x-1 \quad c) \sqrt{x^4-2x^2+1} = x-1$$

$$d) \sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} = x \quad e) \sqrt{x^4-8x^2+16} = 2-x \quad f) \sqrt{9x^2+6x+1} = \sqrt{11-6\sqrt{2}}$$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

$$a) |3x+1| = |x+1| \quad b) |x^2-3| = |x-\sqrt{3}| \quad c) \sqrt{9x^2-12x+4} = \sqrt{x^2}$$

$$d) \sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{4x^2-12x+9}$$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

$$a) |x^2-1| + |x+1| = 0 \quad b) \sqrt{x^2-8x+16} + |x+2| = 0 \quad c) \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x+1} = 0$$

$$d) \sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0$$

II. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP KHAI PHƯƠNG VÀ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA

Phương pháp:

• Khai phương một tích: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$

Nhân các căn bậc hai: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$

• Khai phương một thương: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$

Chia hai căn bậc hai: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$

DẠNG 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48} \quad b) 2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75}) \quad c) (2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$$

$$d) (1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}) \quad e) (\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}})^2$$

$$f) (\sqrt{\sqrt{11} + \sqrt{7}} - \sqrt{\sqrt{11} - \sqrt{7}})^2$$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} & \text{b) } \sqrt{21-12\sqrt{3}} - \sqrt{3} \\ \text{c) } (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2} & \text{d) } (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} \\ \text{e) } \sqrt{13 - \sqrt{160}} - \sqrt{53 + 4\sqrt{90}} & \text{f) } \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}} \end{array}$$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605} & \text{b) } \sqrt{15 - \sqrt{216}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}} & \text{c) } \sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}} \\ \text{d) } \sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & \text{e) } \sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}} & \text{f) } (\sqrt{2} + 1)^3 - (\sqrt{2} - 1)^3 \end{array}$$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{10 + 2\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{8}{1 - \sqrt{5}} & \text{b) } \frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} + \sqrt{162}} & \text{c) } \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} \\ \text{d) } \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5})}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} & \text{e) } \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} & \text{f) } \frac{(\sqrt{5} + 2)^2 - 8\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} \end{array}$$

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \sqrt{12 - 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 + 3\sqrt{7}} & \text{b) } B = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \\ \text{c) } C = \sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}} & \end{array}$$

DẠNG 2: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Bài 1. Rút gọn các biểu thức:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}} & \text{b) } \frac{\sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}} & \text{c) } \frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{6} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}} \\ \text{d) } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} & \text{e) } \frac{x + \sqrt{xy}}{y + \sqrt{xy}} & \text{f) } \frac{\sqrt{a} + a\sqrt{b} - \sqrt{b} - b\sqrt{a}}{ab - 1} \end{array}$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 & \text{b) } \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} \quad (x \geq 0) \\ \text{c) } \frac{x - 1}{\sqrt{y} - 1} \sqrt{\frac{(y - 2\sqrt{y} + 1)^2}{(x - 1)^4}} \quad (x \neq 1, y \neq 1, y > 0) & \end{array}$$

Bài 3. Rút gọn và tính:

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$ với $a=7,25; b=3,25$ b) $\sqrt{15a^2 - 8a\sqrt{15} + 16}$ với $a = \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$

c) $\sqrt{10a^2 - 4a\sqrt{10} + 4}$ với $a = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$ d) $\sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}$ với $a = \sqrt{5}$

DẠNG 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$ b) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ c) $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x+3}$

d) $\frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}} = \sqrt{7x+5}$ e) $\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

DẠNG 4: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. So sánh các số:

a) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ và 1 b) $\sqrt{8} + \sqrt{5}$ và $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ c) $\sqrt{2005} + \sqrt{2007}$ và $\sqrt{2006}$

Bài 2. Cho các số không âm a, b, c . Chứng minh:

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ b) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ c) $a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

d) $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ e) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ b) $B = \sqrt{6-x} + \sqrt{x+2}$ c) $C = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$

III. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

• Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$ + Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$

• Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ + Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$

• Với $A.B \geq 0$ và $B \neq 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ + Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$

• Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2}$

• Với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B}$

DẠNG 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$

b) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$

c) $2\sqrt{\frac{27}{4}} - \sqrt{\frac{48}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{75}{16}}$

d) $3\sqrt{\frac{9}{8}} - \sqrt{\frac{49}{2}} + \sqrt{\frac{25}{18}}$

e) $\left(1 + \frac{5 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}\right) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + 1\right)$

f) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{\sqrt{7} - 5}{2} - \frac{6 - 2\sqrt{7}}{4} + \frac{6}{\sqrt{7} - 2} - \frac{5}{4 + \sqrt{7}}$

b) $\frac{2}{\sqrt{6} - 2} + \frac{2}{\sqrt{6} + 2} + \frac{5}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$

d) $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}}\right) : \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$

f) $\frac{2\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

DẠNG 2: RÚT GỌN BIỂU THỨC

Phương pháp: Đơn giản biểu thức rồi thay số.

Bài 1. Rút gọn và tính giá trị biểu thức:

a) $A = \frac{x - 11}{\sqrt{x - 2} - 3}, x = 23 - 12\sqrt{3}$

b) $B = \frac{1}{2(1 + \sqrt{a})} + \frac{1}{2(1 - \sqrt{a})} - \frac{a^2 + 2}{1 - a^3}, a = \sqrt{2}$

c) $C = \frac{a^4 - 4a^2 + 3}{a^4 - 12a^2 + 27}, a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

d) $D = \frac{1}{\sqrt{h + 2\sqrt{h - 1}}} + \frac{1}{\sqrt{h - 2\sqrt{h - 1}}}, h = 3$

e) $E = \frac{\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 4}}}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2}, x = 2(\sqrt{3} + 1)$

f) $F = \left(\frac{3}{\sqrt{1 + a}} + \sqrt{1 - a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1 - a^2}} + 1\right), a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

DẠNG3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} - \sqrt{25x-25} + 2 = 0$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9x-9} + 24\sqrt{\frac{x-1}{64}} = -17$
- c) $\sqrt{9x^2+18} + 2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{25x^2+50} + 3 = 0$ d) $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$
- e) $(x+1)(x+4) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$

DẠNG4: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 1. Cho biểu thức: $S_n = (\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n$ (với n nguyên dương).

- a) Tính $S_2; S_3$.
- b) Chứng minh rằng: Với mọi m, n nguyên dương và $m > n$, ta có: $S_{m+n} = S_m \cdot S_n - S_{m-n}$
- c) Tính S_4 .

Bài 2. Cho biểu thức: $S_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^n + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n$ (với n nguyên dương).

- a) Chứng minh rằng: $S_{2n} = S_n^2 - 2$ b) Tính S_2, S_4 .

Bài 3. Cho biểu thức: $S_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$ (với n nguyên dương).

- a) Chứng minh rằng: $S_{3n} + 3S_n = S_n^3$ b) Tính S_3, S_9 .

IV. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép biến đổi đơn giản như: đưa thừa số ra ngoài dấu căn, đưa thừa số vào trong dấu căn, khử căn ở mẫu và trục căn thức ở mẫu để làm xuất hiện các căn thức bậc hai có cùng một biểu thức dưới dấu căn.

Trong tất cả các bài toán rút gọn, nếu bài chưa cho điều kiện của x thì các em phải đi tìm điều kiện trước khi thực hiện rút gọn.

Chú ý: Sau khi rút gọn biểu thức A , ta thường có các câu hỏi đi kèm sau:

1. **Tính giá trị của A tại $x = x_0$:** Thông thường các em phải biến đổi x_0 rồi mới thay vào A .
2. **Tìm x để $A = a; A > a; A < a$:** Với bài toán này, ta cho $A = a; A < a; \dots$ rồi tìm x , các em chú ý phải so sánh x với điều kiện trước khi kết luận.
3. **Tìm GTLN, GTNN:**
4. **Chứng minh $A > a; A < a$ (hoặc so sánh A với a):** Các em biến đổi tương đương để đưa về biểu thức đúng.
5. **Tìm x nguyên để A nguyên:**

Bài 1. Cho biểu thức:
$$A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}.$$

- a) Tìm x để biểu thức A có nghĩa. b) Rút gọn biểu thức A . c) Tìm x để $A = 2$.

Bài 2. Cho biểu thức:
$$A = \left(\frac{\sqrt{x-2}}{x-1} - \frac{\sqrt{x+2}}{x+2\sqrt{x+1}} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}.$$

- a) Rút gọn A nếu $x \geq 0, x \neq 1$. b) Tìm x để A dương c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài 3. Cho biểu thức:
$$A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}.$$

- a) Rút gọn A . b) Tìm x để $A < 1$.

Bài 4. Cho biểu thức:
$$A = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left[\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right] \left[\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right].$$

- a) Rút gọn A . b) Tìm a để $A = 7$ c) Tìm a để $A > 6$.

Bài 5. Cho biểu thức:
$$A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}.$$

- a) Rút gọn A . b) Tìm x để $A = \frac{1}{2}$.

Bài 6. Cho biểu thức:
$$A = \left[1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right].$$

- a) Rút gọn A . b) Tìm x để $A < 0$.

Bài 7. Cho biểu thức:
$$A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1.$$

- a) Rút gọn A . b) Tìm a để $A = 2$. c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Bài 8. Cho biểu thức:
$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right).$$

- a) Rút gọn A . b) Tìm a để $A < 0$. c) Tìm a để $A = -2$.

Bài 9. Cho biểu thức:
$$A = 1 + \left(\frac{2a + \sqrt{a} - 1}{1-a} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{1-a\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}.$$

- a) Rút gọn A . b) Tìm a để $A = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$. c) Chứng minh rằng $A > \frac{2}{3}$.

Bài 10. Cho biểu thức:
$$A = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right).$$

- a) Rút gọn A . b) Tìm x để $A < 1$.

Bài 11. Cho biểu thức:
$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right).$$

- a) Rút gọn A. b) Tìm a để $A > \frac{1}{6}$.

Bài 12. Cho biểu thức:
$$A = \left[\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right] : \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right].$$

- a) Rút gọn A. b) Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{3} + \sqrt{8}$. c) Tìm x để $A = \sqrt{5}$.

Bài 13. Cho biểu thức:
$$B = \left[\sqrt{x} + \frac{y - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right] : \left[\frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \right].$$

- a) Rút gọn B. b) Tính giá trị của B khi $x = 3, y = 4 + 2\sqrt{3}$.

Bài 14. Cho biểu thức:
$$B = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy} - 2y} - \frac{2x}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}.$$

- a) Rút gọn B. b) Tìm tất cả các số nguyên dương x để $y = 625$ và $B < 0,2$.

Bài 15. Cho biểu thức:
$$B = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}.$$

- a) Rút gọn B. b) Cho $x, y = 16$. Xác định x, y để B có giá trị nhỏ nhất.

Bài 16. Cho biểu thức:
$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} \right) : \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} \right) : \frac{a-b}{a + \sqrt{ab} + b} \right]$$

- a) Rút gọn B. b) Tính B khi $a = 16, b = 4$.

Bài 17. Cho biểu thức:
$$B = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

- a) Rút gọn B. b) Chứng minh $B \geq 0$.

Bài 18. Cho biểu thức:
$$B = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1} - 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} - \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1} + 1 \right).$$

- a) Rút gọn B. b) Tính giá trị của B nếu $a = 2 - \sqrt{3}$ và $b = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$.

- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của B nếu $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$.

V. CĂN BẬC BA

- Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.

• Mọi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.

• $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$ • $\sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$ • Với $B \neq 0$ ta có: $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$

DẠNG 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Phương pháp: Áp dụng công thức: $\sqrt[3]{a^3} = a$; $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

và các hằng đẳng thức: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$ b) $\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$ c) $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$

d) $(\sqrt[3]{4}+1)^3 - (\sqrt[3]{4}-1)^3$ e) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ b) $B = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

c) $C = (2-\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$ d) $D = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$

DẠNG 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 1. Chứng minh rằng, nếu: $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

thì $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Bài 2. Chứng minh đẳng thức:

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \left[(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})^2 + (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x})^2 \right]$$

DẠNG 3: SO SÁNH HAI SỐ

Phương pháp: $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$

Bài 1. So sánh:

a) $A = 2\sqrt[3]{3}$ và $B = \sqrt[3]{23}$ b) $A = 33$ và $B = 3\sqrt[3]{133}$ c) $A = 5\sqrt[3]{6}$ và $B = 6\sqrt[3]{5}$

Bài 2. So sánh:

a) $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ và $B = 2\sqrt{5}$

DẠNG 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp: $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2x+1} = 3$ b) $\sqrt[3]{2-3x} = -2$ c) $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$

d) $\sqrt[3]{x^3+9x^2} = x+3$ e) $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ b) $\sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5$ c) $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$ b) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$

c) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$ d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}}$

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$ b) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

c) $\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = 8$ d) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} = 6$

Bài 4. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi):

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{2003} + \sqrt{2005}$ và $2\sqrt{2004}$ c) $\sqrt{5\sqrt{3}}$ và $\sqrt{3\sqrt{5}}$

Bài 5. Cho biểu thức: $A = \frac{2x}{x+3} - \frac{x+1}{3-x} - \frac{3-11x}{x^2-9}$ với $x \neq \pm 3$.

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm x để $A < 2$. c) Tìm x nguyên để A nguyên.

Bài 6. Cho biểu thức:
$$A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2003}{x}.$$

- a) Tìm điều kiện để biểu thức A có nghĩa.
 b) Rút gọn A.
 c) Tìm x nguyên để A nhận giá trị nguyên.

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1}{x - \sqrt{x+1}}$$

Bài 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{1-6x+9x^2} + \sqrt{9x^2-12x+4}$$

Bài 9. Tìm x nguyên để biểu thức sau nhận giá trị nguyên:

$$A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$$

Bài 10. Cho biểu thức:
$$Q = \left(\frac{\sqrt{x+2}}{x+2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-2}}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}.$$

- a) Rút gọn Q. b) Tìm số nguyên x để Q có giá trị nguyên.

Bài 11. Cho biểu thức
$$M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$$
 với $a > 0, a \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức M. b) So sánh giá trị của M với 1.

Bài 12. Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x-x}} \right).$$

- a) Tìm điều kiện để P có nghĩa. b) Rút gọn biểu thức P.
 c) Tính giá trị của P với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài 13. Cho biểu thức:
$$B = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3-1}} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$$
 với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

- a) Rút gọn B. b) Tìm x để B = 3.

Bài 14. Cho biểu thức:
$$A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$$

với $x > 0, y > 0$.

- a) Rút gọn A.
 b) Biết $xy = 16$. Tìm các giá trị của x, y để A có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

Bài 15. Cho biểu thức:
$$P = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x}{\sqrt{x-x}}$$

- a) Rút gọn P. b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

CHƯƠNG II: HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

1. Khái niệm hàm số

• Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng của y thì y là **hàm số** của x , x là **biến số**.

Ta viết: $y = f(x)$, $y = g(x)$,...

• Giá trị của $f(x)$ tại x_0 kí hiệu là $f(x_0)$.

• Tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các giá trị của x sao cho $f(x)$ có nghĩa.

• Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y là **hàm hằng**.

2. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho x, y thoả mãn hệ thức $y = f(x)$.

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập R .

a) $y = f(x)$ **đồng biến** trên $R \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in R: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

b) $y = f(x)$ **ngịch biến** trên $R \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in R: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

Bài 1. Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3 - x$.

a) Tính $f(-3)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$.

b) Xác định a để $2f(a) = g(a)$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính $f(4 - 2\sqrt{3})$ và $f(a^2)$ với $a < -1$.

c) Tìm x nguyên để $f(x)$ là số nguyên.

d) Tìm x sao cho $f(x) = f(x^2)$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}$.

a) Tìm tập xác định D của hàm số.

b) Chứng minh rằng $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Bài 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$

b) $y = \frac{x-1}{(x+1)(x-3)}$

c) $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$

d) $y = \frac{3\sqrt{x-1}}{|x|-2}$

e) $y = \sqrt{x-5} - \sqrt{x+3}$

f) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$

Bài 5. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng

biến trong khoảng $(2; +\infty)$.

Bài 6. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = x^3$ luôn luôn đồng biến.

Bài 7. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ nghịch biến trong từng khoảng xác định của nó.

Bài 8. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = \sqrt{3-x+2\sqrt{2-x}}$ nghịch biến trong khoảng xác định của nó.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = -x^3 + x^2 - x + 6$ trên đoạn $[0; 2]$.

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ trong đoạn $[-3; -2]$.

Bài 11. Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = -\frac{2}{3}x$; $y = -\frac{2}{3}x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Có nhận xét gì về hai đồ thị này.

Bài 12. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$.

a) Chứng minh rằng hàm số đồng biến.

b) Trong các điểm $A(4; 2)$, $B(2; 1)$, $C(9; 3)$, $D(8; 2\sqrt{2})$, điểm nào thuộc và điểm nào không thuộc đồ thị của hàm số.

II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

1. Khái niệm hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ với $a \neq 0$.

2. Tính chất

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi x thuộc R và có tính chất sau:

a) Đồng biến trên R nếu $a > 0$ b) Nghịch biến trên R nếu $a < 0$.

3. Đồ thị

• **Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng:**

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b .

– Song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$; trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

• **Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$):**

– Khi $b = 0$ thì $y = ax$. Đồ thị của hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $A(1; a)$.

– Nếu $b \neq 0$ thì đồ thị $y = ax + b$ là đường thẳng đi qua các điểm $A(0; b)$, $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b$ và $(d'): y = a'x + b'$ ($aa' \neq 0$):

• $(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$

$$\bullet (d) \equiv (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

$$\bullet (d) \text{ cắt } (d') \Leftrightarrow a \neq a'$$

$$\bullet (d) \perp (d') \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$$

5. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

• Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc là a .

• Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) với tia Ox :

$$+ a < 90^\circ \text{ thì } a > 0 \quad + a > 90^\circ \text{ thì } a < 0.$$

• Các đường thẳng có cùng hệ số góc thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

• Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dạng 1: Kiểm tra đồ thị hàm số có phải là hàm số bậc nhất không? đồng biến hay nghịch biến?

- Đồ thị $y = ax + b$ là bậc nhất nếu $a \neq 0$, đồng biến nếu $a > 0$; nghịch biến nếu $a < 0$

Bài 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Với các hàm số bậc nhất, hãy cho biết hàm số đó đồng biến hay nghịch biến?

a) $y = 5 - 2x$

b) $y = x\sqrt{2} - 1$

c) $y = 2(x + 1) - 2x$

d) $y = 3(x - 1) - x$

e) $y = -\frac{2}{3}x$

f) $y = x + \frac{1}{x}$

Bài 2. Cho hàm số $y = (3 - \sqrt{2})x + 2$.

a) Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên \mathbb{R} ?

b) Tính các giá trị tương ứng của y khi x nhận các giá trị sau: $0; 1; 3 + \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2}$.

c) Tính các giá trị tương ứng của x khi y nhận các giá trị sau: $0; 1; 5 + \sqrt{2}; 5 - \sqrt{2}$.

Dạng 2: Vẽ đồ thị hàm số, tìm giao điểm của hai đồ thị.

1. Để vẽ đồ thị hàm số, ta tìm hai điểm mà đồ thị hàm số đi qua rồi nối chúng lại (thường tìm giao với hai trục tọa độ).

Vẽ đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

a) **Vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$:**

Cách 1: Dùng quy tắc phá dấu giá trị tuyệt đối rồi vẽ.

Cách 2:

- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục Ox của $y = f(x)$ ($P1$).

- Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục Ox của $y = f(x)$ lên phía trên Ox ta được $P2$.

- Đồ thị $y = |f(x)|$ là $P1$ và $P2$.

b) **Vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$:**

- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$

- Lấy đối xứng qua Oy phần đồ thị bên phải Oy của $y = f(x)$.

- Đồ thị $y = f(|x|)$ là phần bên phải và phần lấy đối xứng

2. Để tìm giao điểm đồ thị hàm số $y=f(x)$ với $y=g(x)$. Ta xét phương trình hoành độ giao điểm : $f(x)=g(x)$, tìm được x_0 rồi tính $y_0=f(x_0)$ suy ra giao điểm $A(x_0;y_0)$.

Dạng 3: Các dạng lập phương trình đường thẳng

a) Lập phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$

Cách 1: Phương trình đường thẳng là: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

Cách 2: giả sử phương trình đường thẳng là $y=a.x+b$ (1)

- Thay tọa độ của $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ vào (1) ta được hệ phương trình ta được:

$\begin{cases} y_1 = a.x_1 + b \\ y_2 = a.x_2 + b \end{cases}$ từ hệ phương trình trên tìm được a, b thay vào (1) ta được phương trình đường thẳng.

b) Lập phương trình đường thẳng qua $A(x_1, y_1)$ và có hệ số góc là k

- Phương trình đường thẳng là: $y=k(x-x_1) + y_1$

c) Lập phương trình đường thẳng qua $A(x_1, y_1)$ và song song với $y=a.x+b$

- Phương trình đường thẳng có dạng: $y=a.x+c$ (với c chưa biết) thay tọa độ điểm $A(x_1, y_1)$ vào đường thẳng ta được : $y_1 = a.x_1 + c$, từ đó tính được c .

d) Lập phương trình đường thẳng qua $A(x_1, y_1)$ và vuông góc với $y=a.x+b$

- Phương trình đường thẳng có dạng: $y = \frac{-1}{a}.x+c$ (với c chưa biết) thay tọa độ điểm $A(x_1, y_1)$ vào đường thẳng ta được : $y_1 = \frac{-1}{a}.x_1 + c$, từ đó tính được c .

Dạng 4: Khoảng cách

- Khoảng cách từ một điểm $A(x_1, y_1)$ đến đường thẳng $ax+by+c=0$ là:

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- Khoảng cách giữa 2 điểm $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ là: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- Tọa độ trung điểm của AB là $I(\frac{x_2+x_1}{2}; \frac{y_2+y_1}{2})$

Dạng 5: Phương pháp chung chứng minh hàm số đồng biến, nghịch biến:

- Giả sử $x_1 < x_2$, tính $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

- Nếu $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, hàm số đồng biến

- Nếu $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, hàm số nghịch biến

Chú ý: Hàm số $y=ax+b$ đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$

Dạng 6: Tìm điểm cố định của $y=f(x,m)$ (chứng minh đồ thị luôn đi qua điểm cố định):

Phương pháp: Đưa phương trình $y=f(x,m)$ về dạng:

$$f(x,m)-y=0 \Leftrightarrow m.f(x)+g(x,y)=0$$

- Gọi $I(x,y)$ là điểm cố định, suy ra $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$ suy ra điểm cố định I

Dạng 7: Chứng minh 3 điểm trên tọa độ không thẳng hàng(thẳng hàng)

Phương pháp: viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm, thay tọa độ điểm thứ 3 vào, nếu thỏa mãn thì 3 điểm thẳng hàng, nếu không thỏa mãn thì 3 điểm không thẳng hàng.

Dạng 8: Tìm m để 3 đường thẳng đồng quy:

Phương pháp: tìm giao điểm của 2 đường thẳng (2 đường thẳng không chứa m) để 3 đường thẳng đồng quy thì giao điểm đó khi thay vào đường thẳng số 3, từ đó tìm được m;

Dạng 9: Tìm a để khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất:

Dạng 10: Tìm a để đồ thị cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB=S.

Bài 3. Cho các hàm số $y = x$ (d_1), $y = 2x$ (d_2), $y = -x + 3$ (d_3).

a) Vẽ trên cùng một hệ trục các đồ thị (d_1), (d_2), (d_3).

b) Đường thẳng (d_3) cắt các đường thẳng (d_1), (d_2) lần lượt tại A và B. Tính tọa độ các điểm A, B và diện tích tam giác OAB.

Bài 4. Cho hàm số $y = (a-1)x + a$.

a) Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(-1;1)$ với mọi giá trị của a .

b) Xác định a để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Vẽ đồ thị hàm số trong trường hợp này.

c) Xác định a để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 . Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đó.

Bài 5. Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = |x|$

b) $y = |2x - 1|$

c) $y = |x - 2| - 1$

Bài 6. Cho hàm số $y = |x - 1| + 2|x|$.

a) Vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Dựa vào đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $|x - 1| + 2|x| = m$.

Bài 7. Tìm các cặp đường thẳng song song và các cặp đường thẳng cắt nhau trong số các đường thẳng sau:

a) $y = \sqrt{3}x - 1$

b) $y = 2 - x$

c) $y = -0,3x$

d) $y = -0,3x - 1$

e) $y = 3 + \sqrt{3}x$

f) $y = -x + 3$

Bài 8. Cho hàm số $y = mx - 3$. Xác định m trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -3x$.

b) Khi $x = 1 + \sqrt{3}$ thì $y = \sqrt{3}$.

Bài 9. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3 .

Bài 10. Cho đường thẳng $y = (a+1)x + a$.

a) Xác định a để đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

b) Xác định a để đường thẳng song song với đường thẳng $y = (\sqrt{3} + 1)x + 4$.

Bài 11. Xác định hàm số trong mỗi trường hợp sau, biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và:

a) Đi qua điểm $A(2;4)$.

- b) Có hệ số góc $a = -\sqrt{2}$.
 c) Song song với đường thẳng $y = 5x - 1$.

Bài 12. Viết phương trình đường thẳng qua gốc toạ độ và:

- a) đi qua điểm $A(-3; 1)$.
 b) có hệ số góc bằng -2 .
 c) song song với đường thẳng $y = 2x - 1$.

Bài 13. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $B(-1; -4)$ và:

- a) có hệ số góc bằng $\frac{1}{2}$.
 b) song song với đường thẳng $y = -3x + 1$.
 c) có hệ số góc bằng k cho trước.

Bài 14. Cho hàm số $y = mx + 3m - 1$.

- a) Định m để đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ.
 b) Tìm toạ độ của điểm mà đường thẳng luôn đi qua với mọi m .

Bài 15. Cho 2 điểm $A(1; -2)$, $B(-4; 3)$.

- a) Tìm hệ số góc của đường thẳng AB . b) Lập phương trình đường thẳng AB .

Bài 16. Cho hai đường thẳng $(d_1) : y = 3x + 4$ và $(d_2) : x - 2y = 0$, một điểm $A(-1; 1)$

- a) Xét vị trí tương đối của A với hai đường thẳng
 b) Tìm giao điểm (d_1) và (d_2)
 c) Tìm M để $(d_3) : (m-1)x + (m-2)y + m + 1 = 0$ đồng quy với (d_1) và (d_2)

Bài 17. Cho hai đường thẳng $(d_1) : y = \left(\frac{3m}{2} - 1\right)x + 1 - 2n$ và $(d_2) : y = (m+2)x + n - 3$.

Tìm m, n để $(d_1) // (d_2)$; $(d_1) \perp (d_2)$

Bài 18. Cho hai đường thẳng $(d_1) : y = (k+1)x + 3$ và $(d_2) : y = (3-2k)x + 1$.

Tìm k để $(d_1) // (d_2)$, (d_1) cắt (d_2) , $(d_1) \perp (d_2)$

Bài 19. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(2; 5)$; $B(-1; -1)$ và $C(4; 9)$

- a) Viết pt đường thẳng BC rồi suy ra ba điểm A, B, C thẳng hàng
 b) Chứng minh ba đường thẳng BC ; $3x - y - 1 = 0$ và $x - 2y + 8 = 0$ đồng quy

Bài 20. Cho đường thẳng $(d_1) : y = mx - 3$ và $(d_2) : y = 2mx + 1 - m$

- a) Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ (d_1) và (d_2) với $m = 1$. Tìm toạ độ giao điểm B của chúng?
 b) Viết pt đường thẳng đi qua O và \perp với (d_1) tại A . Xác định toạ độ điểm A và tính diện tích tam giác AOB
 c) Chứng tỏ (d_1) và (d_2) đều đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó

Bài 21. Cho hai đường thẳng $(d) : mx - y = 2$ và $(d') : (2 - m)x + y = m$

- a) Tìm giao điểm của (d) và (d') với $m = 2$

b) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định B và (d') luôn đi qua một điểm cố định C

c) Tìm m để giao điểm A của hai đường thẳng trên thoả mãn điều kiện là góc BAC vuông

Bài 22. Cho hàm số : $y = (m-2)x+n$ (d) Tìm giá trị của m và n để đồ thị (d) của hàm số :

a) Đi qua hai điểm A(-1;2) và B(3;-4)

b) Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1-\sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $2+\sqrt{2}$.

c) Cắt đường thẳng $-2y+x-3=0$

d) Song song với đường thẳng $3x+2y=1$

Bài 23. Cho đường thẳng (d) $y = \frac{3}{4}x - 3$

a) Vẽ (d)

b) Tính diện tích tam giác được tạo thành giữa (d) và hai trục tọa độ

c) Tính khoảng cách từ gốc O đến (d)

Bài 24. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng :

$$(d) y = (m-1)x + 2 \quad (d') y = 3x - 1$$

a) Song song với nhau

c) Cắt nhau

c) Vuông góc với nhau

Bài 25. Tìm giá trị của a để ba đường thẳng : $(d_1)y = 2x - 5$ $(d_2)y = x + 2$ $(d_3)y = a.x - 12$ đồng quy tại một điểm trong mặt phẳng tọa độ

Bài 26. Cho A(2;-1); B(-3;-2)

1. Tìm phương trình đường thẳng qua A và B.

2. Tìm phương trình đường thẳng qua C(3;0) và song song với AB.

Bài 27. Cho hàm số $y = (m-2)x + m + 3$.

1) Tìm điều kiện của m để hàm số luôn nghịch biến.

2) Tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

3) Tìm m để đồ thị của hàm số trên và các đồ thị của các hàm số $y = -x + 2$; $y = 2x - 1$ đồng quy.

Bài 28. Cho hàm số $y = (m-1)x + m + 3$.

1) Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số song song với đồ thị hàm số $y = -2x + 1$.

2) Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm (1 ; -4).

3) Tìm điểm cố định mà đồ thị của hàm số luôn đi qua với mọi m.

4) Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số tạo với trục tung và trục hoành một tam giác có diện tích bằng 1 (đvdt).

Bài 29. Cho hai điểm A(1 ; 1), B(2 ; -1).

1) Viết phương trình đường thẳng AB.

2) Tìm các giá trị của m để đt $y = (m^2 - 3m)x + m^2 - 2m + 2$ song song với đt AB đồng thời đi qua điểm $C(0; 2)$.

Bài 30. Cho hàm số $y = (2m - 1)x + m - 3$

1) Tìm m để đồ thị của hàm số đi qua điểm $(2; 5)$

2) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định với mọi m . Tìm điểm cố định ấy.

3) Tìm m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = \sqrt{2} - 1$.

Bài 31. Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

1) Với giá trị nào của x hàm số trên nhận các giá trị: $0; -8; -\frac{1}{9}; 2$.

2) A và B là hai điểm trên đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt là -2 và 1 . Viết pt đường thẳng đi qua A và B.

Bài 32. Cho hàm số: $y = x + m$ (D) Tìm các giá trị của m để đường thẳng (D):

a) Đi qua điểm $A(1; 2003)$.

b) Song song với đường thẳng $x - y + 3 = 0$.

c) Tiếp xúc với parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Bài 33. a) Tìm các giá trị của a, b biết rằng đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm

$A(2; -1)$ và $B(\frac{1}{2}; 2)$

b) Với giá trị nào của m thì đồ thị của các hàm số $y = mx + 3; y = 3x - 7$ và đồ thị của hàm số xác định ở câu (a) đồng quy.

Bài 34. Cho hàm số $y = (m - 2)x + m + 3$.

a) Tìm điều kiện của m để hàm số luôn nghịch biến.

b) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 3 .

c) Tìm m để đồ thị các hàm số $y = -x + 2; y = 2x - 1$ và $y = (m - 2)x + m + 3$ đồng quy.

Bài 35. Cho hai đường thẳng $y = 2x + m - 1$ và $y = x + 2m$.

a) Tìm giao điểm của hai đường thẳng nói trên.

b) Tìm tập hợp các giao điểm đó.

Bài 36. Cho hàm số: $y = (2m + 1)x - m + 3$ (1)

a) Tìm m biết đồ thị hàm số (1) đi qua điểm $A(-2; 3)$.

b) Tìm điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi giá trị của m .

Bài 37. Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm $A(3; 0)$ và đường thẳng $x - 2y = -2$.

a) Vẽ đồ thị của đường thẳng. Gọi giao điểm của đường thẳng với trục tung và trục hoành là B và E.

- b) Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng $x - 2y = -2$.
- c) Tìm tọa độ giao điểm C của hai đường thẳng đó. Chứng minh rằng $EO \cdot EA = EB \cdot EC$ và tính diện tích của tứ giác OACB.

Bài 38. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hàm số $y = 3x + m$ (*)

- a) Tính giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua : a) $A(-1; 3)$; b) $B(-2; 5)$
- b) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -3.
- c) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là -5.

Bài 39. Cho đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$. Biết rằng đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 và song song với đường thẳng $y = -2x + 2003$.

- a. Tìm a và b. b. Tìm tọa độ các điểm chung (nếu có) của d và parabol $y = \frac{-1}{2}x^2$

Bài 40. Cho hàm số $y = (m - 1)x + m$ (d)

- a) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2004.
- b) Với giá trị nào của m thì góc α tạo bởi đường thẳng (d) với tia Ox là góc tù?

Bài 41. Với giá trị nào của k, đường thẳng $y = kx + 1$:

- a) Đi qua điểm $A(-1; 2)$?
- b) Song song với đường thẳng $y = 5x$?

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Cho hai hàm số: $y = x$ và $y = 3x$.

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.
- b) Đường thẳng song song với trục Ox, cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 6, cắt các đồ thị trên lần lượt ở A và B. Tìm tọa độ các điểm A và B. Tính chu vi và diện tích tam giác OAB.

Bài 2. Cho hai hàm số $y = -2x$ và $y = \frac{1}{2}x$.

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.
- b) Qua điểm $(0; 2)$ vẽ đường thẳng song song với trục Ox, cắt các đồ thị trên lần lượt tại A và B. Chứng minh tam giác AOB là tam giác vuông và tính diện tích của tam giác đó.

Bài 3. Cho hàm số: $y = (m + 4)x - m + 6$ (d).

- a) Tìm các giá trị của m để hàm số đồng biến, nghịch biến.
- b) Tìm các giá trị của m, biết rằng đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; 2)$. Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị tìm được của m.
- c) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì các đường thẳng (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho hàm số: $y = (3m - 2)x - 2m$.

- a) Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

- b) Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.
 c) Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị ứng với giá trị của m tìm được ở câu a, câu b.

Bài 5. Cho ba đường thẳng $(d_1): y = -x + 1$, $(d_2): y = x + 1$ và $(d_3): y = -1$.

- a) Vẽ ba đường thẳng đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .
 b) Gọi giao điểm của hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là A, giao điểm của đường thẳng (d_3) với hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ theo thứ tự là B và C. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.
 c) Tam giác ABC là tam giác gì? Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 6. Cho các hàm số sau: $(d_1): y = -x - 5$; $(d_2): y = \frac{1}{4}x$; $(d_3): y = 4x$.

- a) Vẽ đồ thị của các hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .
 b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) với đường thẳng (d_2) và (d_3) lần lượt là A và B. Tìm tọa độ các điểm A, B.
 c) Tam giác AOB là tam giác gì? Vì sao? Tính diện tích tam giác AOB.

Bài 7. Cho hàm số: $(d_1): y = 2x + 2$, $(d_2): y = -\frac{1}{2}x - 2$.

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .
 b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) với trục Oy là A, giao điểm của đường thẳng (d_2) với trục Ox là B, còn giao điểm của đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là C. Tam giác ABC là tam giác gì? Tìm tọa độ các điểm A, B, C.
 c) Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 8. Cho hai đường thẳng: $(d_1): y = x + 3$ và $(d_2): y = 3x + 7$.

- a) Vẽ đồ thị của các hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .
 b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) và (d_2) với trục Oy lần lượt là A và B. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB.
 c) Gọi J là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) . Chứng minh tam giác OIJ là tam giác vuông. Tính diện tích của tam giác đó.

Bài 9. Cho đường thẳng $(d): y = -2x + 3$.

- a) Xác định tọa độ giao điểm A và B của đường thẳng (d) với hai trục Ox, Oy . Tính khoảng cách từ điểm $O(0; 0)$ đến đường thẳng (d) .
 b) Tính khoảng cách từ điểm $C(0; -2)$ đến đường thẳng (d) .

Bài 10. Tìm giá trị của k để ba đường thẳng sau đồng quy:

a) $(d_1): y = 2x + 7$, $(d_2): y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $(d_3): y = -\frac{2}{k}x - \frac{1}{k}$

Bài 11. Cho hai đường thẳng: $(d_1): y = (m+1)x - 3$ và $(d_2): y = (2m-1)x + 4$.

- a) Chứng minh rằng khi $m = -\frac{1}{2}$ thì hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.
 b) Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.

Bài 12. Xác định hàm số $y = ax + b$ trong mỗi trường hợp sau:

- Khi $a = \sqrt{3}$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\sqrt{3}$.
- Khi $a = -5$, đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; 3)$.
- Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $M(1; 3)$ và $N(-2; 6)$.
- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = \sqrt{7}x$ và đi qua điểm $(1; 7 + \sqrt{7})$.

Bài 13. Cho đường thẳng: $y = 4x$ (d).

- Viết phương trình đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d) và có tung độ gốc bằng 10.
- Viết phương trình đường thẳng (d_2) vuông góc với đường thẳng (d) và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng -8 .
- Viết phương trình đường thẳng (d_3) song song với đường thẳng (d) cắt trục Ox tại A, cắt trục Oy tại B và diện tích tam giác AOB bằng 8.

Bài 14. Cho hai đường thẳng: $y = (k-3)x - 3k + 3$ (d_1) và $y = (2k+1)x + k + 5$ (d_2). Tìm các giá trị của k để:

- (d_1) và (d_2) cắt nhau.
- (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm trên trục tung.
- (d_1) và (d_2) song song.

Bài 15. Cho hàm số $(d): y = (m+3)x + n$ ($m \neq -3$). Tìm các giá trị của m, n để đường thẳng (d):

- Đi qua các điểm $A(1; -3)$ và $B(-2; 3)$.
- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{3}$, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $3 + \sqrt{3}$.
- Cắt đường thẳng $3y - x - 4 = 0$.
- Song song với đường thẳng $2x + 5y = -1$.

CHƯƠNG III

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Khái niệm phương trình bậc nhất hai ẩn

• Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là hệ thức dạng: $ax + by = c$ (1)

trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

• Nếu x_0, y_0 thoả (1) thì cặp số $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình (1).

• Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , mỗi nghiệm của (1) được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm $(x_0; y_0)$ được biểu diễn bởi điểm $(x_0; y_0)$.

2. Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

• Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$ (d).

• Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng (d) là đồ thị của hàm số $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì phương trình trở thành $ax = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$ và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung.

Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình trở thành $by = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$ và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành.

Bài 13. Trong các cặp số $(0; 4)$, $(-1; 3)$, $(1; 1)$, $(2; 3)$, $(4; 6)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình:

a) $5x - 3y = 2$

b) $2x + y = 7$

c) $2x - y = 2$

Bài 14. Tìm nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó:

a) $3x - y = 1$

b) $x - 2y = 5$

c) $2x - 3y = 5$

d) $3y + x = 2$

e) $4x + 0y = 12$

f) $0x - 3y = 6$

Bài 15. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $(m-1)x + (3m-4)y = -2m-5$. Tìm m để:

a) (d) song song với trục hoành.

b) (d) song song với trục tung.

c) (d) đi qua gốc tọa độ.

d) (d) đi qua điểm $A(2; -1)$.

Bài 16. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

a) $2x + y = 0$

b) $3x - 2y = 5$

c) $2x + 5y = 15$

d) $5x - 11y = 4$

e) $7x + 5y = 143$

f) $23x + 53y = 109$

e) $\begin{cases} x = 5t + 4 \\ y = -7t + 23 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 53t - 16 \\ y = -23t + 9 \end{cases}$

Bài 17. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

a) $11x + 8y = 73$

b) $5x + 7y = 112$

c) $5x + 19y = 674$

d) $2x - 3y = 7$

e) $7x + 13y = 71$

II. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Khái niệm hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (I)$$

• Nếu hai phương trình trên có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ (I).

• Nếu hai phương trình trên không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.

• Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

2. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Tập nghiệm của hệ phương trình (I) được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng $(d_1): a_1x + b_1y = c_1$ và $(d_2): a_2x + b_2y = c_2$.

• Nếu (d_1) cắt (d_2) thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất.

• Nếu $(d_1) // (d_2)$ thì hệ (I) vô nghiệm.

• Nếu $(d_1) \equiv (d_2)$ thì hệ (I) có vô số nghiệm.

3. Hệ phương trình tương đương

Hai hệ phương trình là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Bài 1. Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau và giải thích vì sao:

a)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x + 0y = 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 0x - y = 2 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 2. Bằng đồ thị chứng tỏ các hệ phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất với bất kì giá trị nào của a :

a)
$$\begin{cases} x = a \\ x + y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ y = a \end{cases}$$

Bài 3. Bằng đồ thị chứng tỏ hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ ax + 2y = 3 \end{cases}$$

a) Có nghiệm duy nhất với $a = -2$. b) Vô nghiệm với $a = -6$.

Bài 4. Bằng đồ thị chứng tỏ hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 2y = a \\ 15x - 10y = 5 \end{cases}$$

a) Có vô số nghiệm với $a = 1$. b) Vô nghiệm với $a \neq 1$.

Bài 5. Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ mx - y = 2m \end{cases}$$

Bài 6. Xác định a để hai hệ phương trình sau là tương đương:

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + y = 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 12x + 3y = a \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2ax - 2y = 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

III. GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Phương pháp thế

• *Bước 1:* Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là PT (1)), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình thứ hai (PT (2)) để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

• *Bước 2:* Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho PT (2) trong hệ (PT (1) cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia).

2. Phương pháp cộng đại số

• *Bước 1:* Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

• *Bước 2:* Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (giữ nguyên phương trình kia).

Chú ý:

• Trong phương pháp cộng đại số, trước khi thực hiện bước 1, có thể nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.

• Đôi khi ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa hệ phương trình đã cho về hệ phương trình với hai ẩn mới, rồi sau đó sử dụng một trong hai phương pháp giải ở trên.

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

$$a) \begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y = \frac{4x - 3}{5} \\ x + 3y = \frac{15 - 9y}{14} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{3} \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{2y}{5} = 19 \\ 4x + \frac{3y}{2} = 21 \end{cases}$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} -x + 2y = -4(x - 1) \\ 5x + 3y = -(x + y) + 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 9x - 6y = 4 \\ 3(4x - 3y) = -3x + y + 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3(x + 1) + 2y = -x \\ 5(x + y) = -3x + y - 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10 \\ 4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} (x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1) \\ (x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4) \end{cases}$$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2x + 3|y| = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -2 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 3 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} (x-1)^2 - 2y = 2 \\ 3(x-1)^2 + 3y = 1 \end{cases}$$

Bài 4. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} mx + y = 3m - 1 \\ x + my = m + 1 \end{cases}$$

Bài 5. Tìm m nguyên để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên:

$$\text{a) } \begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (m + 1)x - 2y = m - 1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$$

Bài 6. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ 5x - 3y = -31 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 7x + 5y = 19 \\ 3x + 5y = 31 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 7x - 5y = 3 \\ 3x + 10y = 62 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} x + 5y = -5 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 3y = -12 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases} \end{array}$$

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 3(x + 1) + 2y = -x \\ 5(x + y) = -3x + y - 5 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x + 5 = -(x + y) \\ 6x + 3y = y - 10 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y = -2(x - 1) \\ 7x + 3y = x + y + 5 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases} \end{array}$$

Bài 8. Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A(2; 1), B(1; 2) & \text{b) } A(1; 3), B(3; 2) & \text{c) } A(1; -3), B(2; 3) \\ \text{d) } A(-1; 1), B(2; 3) & \text{e) } A(2; -2), B(-1; -2) & \text{f) } A(1; 0), B(1; -6) \end{array}$$

Bài 9. Chứng tỏ rằng khi m thay đổi, các đường thẳng có phương trình sau luôn đi qua một điểm cố định:

$$\text{a) } (-5m + 4)x + (3m - 2)y + 3m - 4 = 0 \quad \text{b) } (2m^2 + m + 4)x - (m^2 - m - 1)y - 5m^2 - 4m - 13 = 0$$

IV. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

- Bước 1: Lập hệ phương trình:
 - + Chọn hai ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
 - + Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
 - + Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- Bước 2: Giải hệ hai phương trình nói trên.
- Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán (thỏa mãn điều kiện ở bước 1) và kết luận.

Dạng 1: Toán về quan hệ giữa các số

- Bài 1.** Tìm một số tự nhiên có hai chữ số sao cho tổng của hai chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.
- Bài 2.** Tìm một số tự nhiên có ba chữ số sao cho tổng các chữ số bằng 17, chữ số hàng chục là 4, nếu đổi chỗ các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì số đó giảm đi 99 đơn vị.
- Bài 3.** Tìm một số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 11, biết rằng khi chia số đó cho 11 thì được thương bằng tổng các chữ số của số bị chia.
- Bài 4.** Tìm hai số biết rằng tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

Dạng 2: Toán làm chung công việc

- Bài 1.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể sau 4 giờ 48 phút thì đầy bể. Nếu vòi I chảy trong 4 giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{3}{4}$ bể. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng một mình đầy bể.
- Bài 2.** Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ II được điều đi làm việc khác, tổ I đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ xong công việc đó.
- Bài 3.** Hai lớp 9A và 9B cùng tham gia lao động vệ sinh sân trường thì công việc được hoàn thành sau 1 giờ 20 phút. Nếu mỗi lớp chia nhau làm nửa công việc thì thời gian hoàn tất là 3 giờ. Hỏi nếu mỗi lớp làm một mình thì phải mất bao nhiêu thời gian.

Dạng 3: Toán chuyển động

- Bài 1.** Một ô tô đi từ tỉnh A đến tỉnh B với một vận tốc đã định. Nếu vận tốc tăng thêm 20 km/h thì thời gian đi được sẽ giảm 1 giờ. Nếu vận tốc giảm bớt 10 km/h thì thời gian đi sẽ tăng thêm 1 giờ. Tính vận tốc và thời gian dự định của ô tô.
- Bài 2.** Hai địa điểm A và B cách nhau 85 km . Cùng lúc, một canô đi xuôi dòng từ A đến B và một canô đi ngược dòng từ B đến A, sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc thật của mỗi canô, biết rằng vận tốc canô đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc canô đi ngược dòng là 9 km/h và vận tốc dòng nước là 3 km/h (vận tốc thật của các canô không đổi).
- Bài 3.** Quãng đường AB dài 200 km . Cùng lúc một xe máy đi từ A đến B và một ô tô đi từ B đến A. Xe máy và ô tô gặp nhau tại điểm C cách A 120 km . Nếu xe máy khởi hành sau ô tô 1 giờ thì gặp nhau tại điểm D cách C 24 km . Tính vận tốc của ô tô và xe máy.
- Bài 4.** Một xe khách và một xe du lịch khởi hành đồng thời từ A để đi đến B. Biết vận tốc của xe du lịch lớn hơn vận tốc xe khách là 20 km/h . Do đó xe du lịch đến B trước xe khách 50 phút. Tính vận tốc mỗi xe, biết quãng đường AB dài 100 km .
- Bài 5.** Một người đi xe máy từ A đến B. Vì có việc gấp phải đến B trước thời gian dự định là 45 phút nên người đó tăng vận tốc lên mỗi giờ 10 km . Tính vận tốc mà người đó dự định đi, biết quãng đường AB dài 90 km .

Bài 6. Một người đi xe máy từ A tới B. Cùng một lúc một người khác cũng đi xe máy từ B tới A với vận tốc bằng $\frac{4}{5}$ vận tốc của người thứ nhất. Sau 2 giờ hai người gặp nhau. Hỏi mỗi người đi cả quãng đường AB hết bao lâu?

Bài 7. Một canô ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc 20 km/h, sau đó lại xuôi từ bến B trở về bến A. Thời gian canô ngược dòng từ A đến B nhiều hơn thời gian canô xuôi dòng từ B trở về A là 2 giờ 40 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết vận tốc dòng nước là 5 km/h, vận tốc riêng của canô lúc xuôi dòng và lúc ngược dòng bằng nhau.

Dạng 4: Toán có nội dung hình học

Bài 1. Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3 dm và cạnh đáy giảm đi 3 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm^2 . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

Bài 2. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 48 m. Nếu tăng chiều rộng lên bốn lần và chiều dài lên ba lần thì chu vi của khu vườn sẽ là 162 m. Hãy tìm diện tích của khu vườn ban đầu.

Bài 3. Người ta muốn làm một chiếc thùng tôn hình trụ không nắp có bán kính đáy là 25 cm, chiều cao của thùng là 60 cm. Hãy tính diện tích tôn cần dùng (không kể mép nối). Thùng tôn đó khi chứa đầy nước thì thể tích nước chứa trong thùng là bao nhiêu.

Bài 4. Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2 . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng sẽ tăng thêm 5 m^2 .

Dạng 5: Các Dạng khác

Bài 1. Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách trên giá thứ hai bằng $\frac{4}{5}$ số sách ở giá thứ nhất. Tính số sách trên mỗi giá.

Bài 2. Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 dụng cụ. Thực tế, xí nghiệp I vượt mức kế hoạch 10%, xí nghiệp II vượt mức kế hoạch 15%, do đó cả hai xí nghiệp đã làm được 404 dụng cụ. Tính số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

Bài 3. Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Mặc dù người đó mỗi giờ đã làm thêm một sản phẩm so với dự kiến, nhưng thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm so với dự định là 12 phút. Tính số sản phẩm dự kiến làm trong 1 giờ của người đó. Biết mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

Bài 4. Theo kế hoạch, một công nhân phải hoàn thành 60 sản phẩm trong thời gian nhất định. Nhưng do cải tiến kĩ thuật nên mỗi giờ người công nhân đó đã làm thêm được 2 sản phẩm. Vì

vậy, chẳng những hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 30 phút mà còn vượt mức 3 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm.

Bài 5. Một đội công nhân hoàn thành một công việc với mức 420 ngày công thợ (nghĩa là nếu công việc đó chỉ có một người làm thì phải mất 420 ngày). Hãy tính số công nhân của đội biết rằng nếu đội tăng thêm 5 người thì số ngày để đội hoàn thành công việc sẽ giảm đi 7 ngày.

Bài 6. Một đội xe vận tải phải vận chuyển 28 tấn hàng đến một địa điểm qui định. Vì trong đội có 2 xe phải điều đi làm việc khác nên mỗi xe phải chở thêm 0,7 tấn hàng nữa. Tính số xe của đội lúc đầu.

Bài 7. Người ta dự kiến trồng 300 cây trong một thời gian đã định. Do điều kiện thuận lợi nên mỗi ngày trồng được nhiều hơn 5 cây so với dự kiến, vì vậy đã trồng xong 300 cây ấy trước 3 ngày. Hỏi dự kiến ban đầu mỗi ngày trồng bao nhiêu cây? (Giả sử số cây dự kiến trồng mỗi ngày là bằng nhau).

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - (\sqrt{2} - 1)y = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 16 \\ \frac{5}{2}x - \frac{3}{5}y = 11 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 18 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{10}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-1} + \frac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2|x+y| - |x-y| = 9 \\ 3|x+y| + 2|x-y| = 17 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 4|x+y| + 3|x-y| = 8 \\ 3|x+y| - 5|x-y| = 6 \end{cases}$$

Bài 3. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} mx + (m-1)y = m+1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} mx + (m-2)y = 5 \\ (m+2)x + (m+1)y = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (m-1)x + 2y = 3m-1 \\ (m+2)x - y = 1-m \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (m+4)x - (m+2)y = 4 \\ (2m-1)x + (m-4)y = m \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} mx + 2y = m+1 \\ 2x + my = 2m+5 \end{cases}$$

Bài 4. Trong các hệ phương trình sau hãy:

i) Giải và biện luận. ii) Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

$$\text{a) } \begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m+1)y = 4m \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} mx + y - 3 = 3 \\ x + my - 2m + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 5. Trong các hệ phương trình sau hãy:

i) Giải và biện luận.

ii) Khi hệ có nghiệm $(x; y)$, tìm hệ thức giữa x, y độc lập đối với m .

$$\text{a) } \begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m + 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 6mx + (2 - m)y = 3 \\ (m - 1)x - my = 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} mx + (m - 1)y = m + 1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

Bài 6. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 3y + 2z = -7 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$$

Bài 7. Một khu vườn hình chữ nhật, chiều dài lớn hơn chiều rộng 5 m, diện tích bằng 300 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Bài 8. Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ tăng thêm 13 cm^2 . Nếu giảm chiều dài đi 2 cm, chiều rộng đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm 15 cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đã cho.

Bài 9. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 80 m. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m, chiều rộng thêm 5 m thì diện tích của mảnh đất tăng thêm 195 m^2 . Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh đất.

Bài 10. Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{2}{5}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao giảm đi 2 dm và cạnh đáy tăng thêm 3 dm thì diện tích của nó giảm đi 14 dm^2 . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

Bài 11. Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 90 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 1,2 giờ (xe thứ nhất khởi hành từ A, xe thứ hai khởi hành từ B). Tìm vận tốc của mỗi xe. Biết rằng thời gian để xe thứ nhất đi hết quãng đường AB ít hơn thời gian để xe thứ hai đi hết quãng đường AB là 1 giờ.

Bài 12. Một xe lửa đi từ ga Hà Nội vào ga Trị Bình (Quảng Ngãi). Sau đó 1 giờ, một xe lửa khác đi từ ga Trị Bình ra ga Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga ở chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc của mỗi xe lửa, biết quãng đường sắt Hà Nội – Trị Bình dài 900km.

Bài 13. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên đến B trước ô tô thứ hai là $\frac{2}{5}$ giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô?

Bài 14. Một canô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km; cùng lúc đó, cũng từ A về B một bè nửa trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B canô quay lại ngay và gặp bè nửa tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của canô.

Bài 15. Cùng một thời điểm, một chiếc ô tô X_A xuất phát từ thành phố A về hướng thành phố B và một chiếc khác X_B xuất phát từ thành phố B về hướng thành phố A. Chúng chuyển động với vận tốc riêng không đổi và gặp nhau lần đầu tại một điểm cách A là 20 km. Cả hai chiếc xe sau khi đến B và A tương ứng, lập tức quay trở lại và chúng gặp nhau lần thứ hai tại một điểm C. Biết thời gian xe X_B đi từ C đến B là 10 phút và thời gian giữa hai lần gặp nhau là 1

giờ. Hãy tính vận tốc của từng chiếc ôtô.

Bài 16. Một xuồng máy xuôi dòng sông 30 km và ngược dòng 28 km hết một thời gian bằng thời gian mà xuồng đi 59,5 km trên mặt hồ yên lặng. Tính vận tốc của xuồng khi đi trên hồ biết rằng vận tốc của nước chảy trên sông là 3 km/h.

Bài 17. Một xe máy đi từ A đến B trong một thời gian dự định. Nếu vận tốc tăng thêm 14 km/giờ thì đến sớm 2 giờ, nếu giảm vận tốc đi 4 km/giờ thì đến muộn 1 giờ. Tính vận tốc dự định và thời gian dự định.

Bài 18. Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120 km, cả đi và về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài 19. Một canô đi xuôi dòng 48 km rồi đi ngược dòng 22 km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lớn hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc đi xuôi lớn hơn vận tốc đi ngược là 5 km/h. Tính vận tốc canô lúc đi ngược dòng.

Bài 20. Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?

Bài 21. Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì sau 12 giờ bể đầy. Sau khi hai vòi cùng chảy 8 giờ thì người ta khoá vòi I, còn vòi II tiếp tục chảy. Do tăng công suất vòi II lên gấp đôi, nên vòi II đã chảy đầy phần còn lại của bể trong 3 giờ rưỡi. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình với công suất bình thường thì phải bao lâu mới đầy bể?

Bài 22. Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ II được điều đi làm việc khác, tổ I đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó?

Bài 23. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch?

Bài 24. Có 3 đội xây dựng cùng làm chung một công việc. Làm chung được 4 ngày thì đội III được điều động làm việc khác, 2 đội còn lại cùng làm thêm 12 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Biết rằng năng suất của đội I cao hơn năng suất của đội II; năng suất của đội III là trung bình cộng của năng suất đội I và năng suất đội II; và nếu mỗi đội làm một mình một phần ba công việc thì phải mất tất cả 37 ngày mới xong. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày xong công việc trên.

Bài 25. Nhà trường tổ chức cho 180 học sinh khối 9 đi tham quan di tích lịch sử. Người ta dự tính nếu dùng loại xe lớn chuyên chở một lượt hết số học sinh thì phải điều ít hơn nếu dùng loại xe nhỏ là hai chiếc. Biết rằng mỗi xe lớn có nhiều hơn mỗi xe nhỏ là 15 chỗ ngồi. Tính số xe lớn, nếu loại xe đó được huy động.

CHƯƠNG IV

HÀM SỐ $y=ax^2$ ($a \neq 0$). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

I. HÀM SỐ $y=ax^2$ ($a \neq 0$)

1. Tập xác định của hàm số

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Tính chất biến thiên của hàm số

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

3. Đồ thị của hàm số

• Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó là một parabol với đỉnh O .

Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

• Vì đồ thị $y = ax^2$ ($a \neq 0$) luôn đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng nên để vẽ đồ thị của hàm số này, ta chỉ cần tìm một điểm ở bên phải trục Oy rồi lấy các điểm đối xứng với chúng qua Oy .

Bài 18. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

- Chứng minh rằng $f(a) - f(-a) = 0$ với mọi a .
- Tìm $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a-1) = 4$.

Bài 19. Cho hàm số $y = (m+2)x^2$ ($m \neq -2$). Tìm giá trị của m để:

- Hàm số đồng biến với $x < 0$.
- Có giá trị $y = 4$ khi $x = -1$.
- Hàm số có giá trị lớn nhất là 0.
- Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

Bài 20. Cho hàm số $y = \frac{1}{10}x^2$.

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- Các điểm sau có thuộc đồ thị hay không: $A\left(3; \frac{9}{10}\right), B\left(-5; \frac{5}{2}\right), C(-10; 1)$?

Bài 21. Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định m để các điểm sau nằm trên parabol:

- $A(\sqrt{2}; m)$
- $B(-\sqrt{2}; m)$
- $C\left(m; \frac{3}{4}\right)$

Bài 22. Xác định m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 2)x^2$ đi qua điểm $A(1; 2)$. Với m tìm được, đồ thị hàm số có đi qua điểm $B(2; 9)$ hay không?

Bài 23.

- Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và điểm $M(2; 4)$.
- Viết phương trình parabol dạng $y = ax^2$ và đi qua điểm $M(2; 4)$.
- Vẽ parabol và đường thẳng trên cùng một hệ trục tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

Bài 24. Trên cùng một hệ trục tọa độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = g(x) = \frac{1}{2}x$. Dựa

vào đồ thị hãy giải các bất phương trình:

- a) $f(x) < g(x)$ b) $f(x) \geq g(x)$.

Bài 25. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

- a) Xác định a để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 2)$.
b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.
c) Tìm các điểm trên đồ thị có tung độ bằng 4.
d) Tìm các điểm trên đồ thị và cách đều hai trục tọa độ.

Bài 26. Cho hàm số $y = 2x^2$.

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.
b) Dựa vào đồ thị (P) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $2x^2 + 1 = m$.

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn; a , b , c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$:

• Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

• Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Nếu phương trình có a và c trái dấu thì $\Delta > 0$. Khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

3. Công thức nghiệm thu gọn

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$:

• Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

• Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

• Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

4. Hệ thức Viet

• **Định lí Viet:** Nếu x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; & x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

• Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \quad (\text{Điều kiện để có hai số đó là: } S^2 - 4P \geq 0).$$

5. Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

(1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$

(1) có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

(1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

(1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Chú ý: Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm:

• Nếu nhẩm được: $x_1 + x_2 = m + n$; $x_1 x_2 = mn$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = m$, $x_2 = n$.

• Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

• Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)^2 - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$ b) $9(x-2)^2 - 4(x-1)^2 = 0$ c) $2x^2 - 3(2x-3)^2 = 0$

d) $x^2 - 4x + 3 = 0$ e) $x^2 + 6x - 16 = 0$ f) $7x^2 + 12x + 5 = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 5x + 8 = 0$ b) $5x^2 - 3x + 15 = 0$ c) $x^2 - 4x + 1 = 0$

d) $3x^2 + 7x + 2 = 0$ e) $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$ f) $(5 - \sqrt{2})x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $10x^2 + 17x + 3 = 2(2x - 1) - 15$ b) $x^2 + 7x - 1 = x(x - 1) - 1$

c) $2x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x - 1) + 3$ d) $5x^2 - x - 2 = 2x(x - 1) - 1 + x^2$

e) $-6x^2 + x - 3 = -3x(x - 1) - 11$ f) $-4x^2 + x(x + 1) = x(x + 3) + 5$

g) $x^2 - x - 3(2x + 3) = -x(x - 2) - 1$ h) $-x^2 - 4x - 7 = -2x(x + 2) - 7$

i) $8x^2 - x - 3 = 2x(x - 1) - x(x - 2)$ k) $3(2x + 3) = -x(x - 2) - 1$

Bài 4. Tìm m để các phương trình sau:

i) có nghiệm ii) có 2 nghiệm phân biệt iii) có nghiệm kép iv) vô nghiệm

a) $9x^2 - 6mx + m(m-2) = 0$ b) $2x^2 - 10x + m - 1 = 0$ c) $5x^2 - 12x + m - 3 = 0$
d) $3x^2 - 4x + 2m = 0$ e) $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ y + x^2 = 4x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x+y) - 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0 \end{cases}$

Bài 6. Cho phương trình: $x^2 - 2(3m+2)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$.

- a) Giải phương trình với $m = -2$.
b) Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -1 .
c) Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm kép.

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3m - 5 = 0$.

- a) Giải phương trình với $m = 3$.
b) Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -4 .
c) Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm kép..

Bài 8. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$.

- a) Giải phương trình với $m = -1$ và $m = 3$.
b) Tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng 4 .
c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 9. Xác định m để mỗi cặp phương trình sau có nghiệm chung:

a) $x^2 + mx + 2 = 0$ và $x^2 + 2x + m = 0$
b) $x^2 - (m+4)x + m + 5 = 0$ và $x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0$

Bài 10. Không giải phương trình, hãy nhẩm nghiệm các phương trình sau:

a) $x^2 - 10x + 16 = 0$ b) $x^2 - 15x + 50 = 0$ c) $x^2 - 6x + 5 = 0$
d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - x - 20 = 0$
g) $x^2 + 5x - 6 = 0$ h) $x^2 + 5x + 6 = 0$ i) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Bài 11. Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm là các cặp số sau:

a) 10 và 8 b) 10 và -8 c) 3 và $\frac{1}{4}$
d) $-\frac{3}{4}$ và $-\frac{2}{3}$ e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ f) $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$

Bài 12. Với các phương trình sau, tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng x_0 . Tìm nghiệm còn lại:

a) $3x^2 + 7x + m = 0; x_0 = 1$ b) $15x^2 + mx - 1 = 0; x_0 = \frac{1}{3}$
c) $x^2 - 2(3m+1)x + 2m^2 - 2m - 5 = 0; x_0 = -1$ d) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5m - 2 = 0; x_0 = 1$

Bài 13. Cho phương trình: $(m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$.

- a) Giải phương trình với $m = -2$.
 b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.
 c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $x_1 = 2x_2$.

Bài 14. Cho phương trình: $2x^2 - 6x + m + 7 = 0$.

- a) Giải phương trình với $m = -3$.
 b) Với giá trị nào của m thì phương trình có một trong các nghiệm bằng -4 .
 c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = 2x_2$.

Bài 15. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$.

- a) Giải phương trình với $m = -4$.
 b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.
 c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = 3x_2$.

Bài 16. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của mỗi phương trình sau. tính giá trị của các biểu thức:

$$A = x_1^2 + x_2^2; \quad B = x_1^3 + x_2^3; \quad C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad D = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$$

- a) $x^2 + mx + 1 = 0$ b) $x^2 + 6x + m = 0$ c) $x^2 - (m-3)x + 2m + 1 = 0$

Bài 17. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$.

- a) Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 b) Tìm m để biểu thức $B = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.
 c) Tìm m để biểu thức $C = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 18. Tìm m để mỗi phương trình sau có các nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức đã cho:

a) $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1.$

b) $x^2 - 2(m-2)x + m^2 + 2m - 3 = 0; \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}.$

c) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0; \quad x_1^2 + x_2^2 = 8.$

Bài 19. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$.

- a) Tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -2 . Tìm nghiệm còn lại.
 b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 8$.
 c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

Bài 20. Cho phương trình: $x^2 - (2a-1)x + 4a - 3 = 0$.

- a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của a .
 b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào a .

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

Bài 21. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$.

a) Xác định m để phương trình có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 4x_2 = 3$.

b) Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 mà không phụ thuộc vào m .

Bài 22. Cho phương trình: $mx^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hiệu hai nghiệm x_1, x_2 bằng 2.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m .

Bài 23. Với mỗi phương trình sau, tìm m để phương trình:

i) Có hai nghiệm trái dấu

ii) Có hai nghiệm dương phân biệt

iii) Có đúng một nghiệm dương.

a) $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$

b) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$

c) $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$

d) $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0$

Bài 24. Cho phương trình: $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - 4x_2 = 11$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

c) khi phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

III. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Phương trình trùng phương

Phương trình trùng phương là phương trình có dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$).

Cách giải: Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), đưa về phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$.

2. Phương trình bậc bốn dạng: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$ với $a+b=c+d$

Cách giải: Đặt $t = x^2 + (a+b)x$, đưa về phương trình bậc hai $(t+ab)(t+cd) = m$.

3. Phương trình bậc bốn dạng: $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$

Cách giải: Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$, đưa về phương trình trùng phương theo t .

Chú ý: $(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$.

4. Phương trình bậc bốn dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$

Cách giải:

- Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

- Với $x \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho x^2 ta được: $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + c = 0$.

Đặt $t = x \pm \frac{1}{x}$, đưa về phương trình bậc hai theo t .

5. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Cách giải: Thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thoả mãn điều kiện xác định, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

6. Phương trình tích

Phương trình tích là phương trình có dạng $A.B = 0$.

Cách giải: $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

7. Phương trình chứa căn thức

$$\bullet \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases} \quad \bullet af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$$

8. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Cách giải: Có thể dùng các phương pháp sau để bỏ giá trị tuyệt đối:

• Dùng định nghĩa hoặc tính chất giá trị tuyệt đối.

• Đặt ẩn phụ.

9. Phương trình dạng $A^2 + B^2 = 0$

Cách giải: $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

10. Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt:

- Nhắm một nghiệm x_0 rồi đưa phương trình về dạng: $(x-x_0)(ax^2+bx+c)=0$. Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì: $f(x) = ax^2+bx+c=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác x_0 . Suy ra:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m$$

11. Tìm m để phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ (1) có 4 nghiệm:

- Đặt $t=x^2$ ($t \geq 0$). Suy ra $at^2+bt+c=0$ (2). Để phương trình (1) có 4 nghiệm thì phương trình (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt. Suy ra:

$$\begin{cases} a \neq 0; \Delta > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow m$$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$

b) $12x^4 - 5x^2 + 30 = 0$

c) $8x^4 - x^2 - 7 = 0$

d) $5x^4 - 3x^2 + \frac{7}{16} = 0$

e) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$

f) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

g) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$

b) $(x+1)(x+4)(x^2 + 5x + 6) = 24$

c) $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 2$

d) $(x+2)^2(x^2 + 4x) = 5$

e) $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$

f) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$

b) $(x^2 + 4x + 2)^2 + 4x^2 + 16x + 11 = 0$

c) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

d) $(2x+1)^4 - 8(2x+1)^2 - 9 = 0$

e) $(x^4 + 4x^2 + 4) - 4(x^2 + 2) - 77 = 0$

f) $\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 - 4\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + 3 = 0$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{3x}{x-2}$

b) $\frac{4x}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$

c) $\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{5}{x^2 - 5x + 6}$

d) $\frac{1}{3x^2 - 27} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{x-3}$

e) $\frac{x}{x-2} + \frac{x+3}{x-1} = 6$

f) $\frac{2x-1}{x} + 3 = \frac{x+3}{2x-1}$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $(4x^2 - 25)(2x^2 - 7x - 9) = 0$

b) $(2x^2 - 3)^2 - 4(x-1)^2 = 0$

c) $2x(3x-1)^2 - 9x^2 + 1 = 0$

d) $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$

e) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

f) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Bài 6. Tìm m để các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3 - (2m+1)x^2 + 3(m+4)x - m - 12 = 0$

b) $x^3 + (2m-3)x^2 + (m^2 - 2m + 2)x - m^2 = 0$

Bài 7. Tìm m để các phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:

a) $x^4 - (2m+1)x^2 + m^2 = 0$

b) $(x^2 - 1)(x+3)(x+5) = m$

Bài 8. Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 14|x| - 5 = 0$

b) $|x-1| + x^2 = x + 3$

c) $|x+2| - 2x + 1 = x^2 + 2x + 3$

d) $|x^2 + 1| - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3x$

Bài 9. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-5} = x-7$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$

c) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$

d) $x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3x + 7$

e) $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{x+14}$

f) $\sqrt{2x^2 + 6x + 1} = x + 2$

Bài 10. Giải các hệ phương trình sau: (Đưa về Dạng $A^2 + B^2 = 0$)

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 27 \\ xy + yz + zx = 27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases}$

IV. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Bước 1: Lập phương trình

- a) Chọn ẩn số và nêu điều kiện thích hợp của ẩn số.
- b) Biểu thị các dữ kiện chưa biết qua ẩn số.
- c) Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết.

Bước 2: Giải phương trình

Bước 3: Đối chiếu nghiệm của phương trình (nếu có) với điều kiện của ẩn số để trả lời.

Dạng 1: Toán về quan hệ giữa các số

- Bài 1.** Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu các bình phương của chúng bằng 119.
- Bài 2.** Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.
- Bài 3.** Tìm một số có hai chữ số, biết rằng số đó gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó và nếu số cần tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và số dư là 3.
- Bài 4.** Nếu tử số của một phân số được tăng gấp đôi và mẫu số thêm 8 thì giá trị của phân số bằng $\frac{1}{4}$. Nếu tử số thêm 7 và mẫu số tăng gấp 3 thì giá trị phân số bằng $\frac{5}{24}$. Tìm phân số đó.
- Bài 5.** Nếu thêm 4 vào tử và mẫu của một phân số thì giá trị của phân số giảm 1. Nếu bớt 1 vào cả tử và mẫu thì phân số tăng $\frac{3}{2}$. Tìm phân số đó.

Dạng 2: Toán chuyển động

- Bài 1.** Một canô đi xuôi dòng 45 km, rồi ngược dòng 18 km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lâu hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc đi xuôi lớn hơn vận tốc đi ngược là 6 km/h. Tính vận tốc canô lúc đi ngược dòng.
- Bài 2.** Một ô tô đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.
- Bài 3.** Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120 km với vận tốc dự định trước. Sau khi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB, người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.
- Bài 4.** Một canô xuôi từ bến sông A đến bến sông B với vận tốc 30 km/h, sau đó lại ngược từ B trở về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian đi ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của canô lúc xuôi và lúc ngược bằng nhau.
- Bài 5.** Một canô xuôi một khúc sông dài 90 km rồi ngược về 36 km. Biết thời gian xuôi dòng sông nhiều hơn thời gian ngược dòng là 2 giờ và vận tốc khi xuôi dòng hơn vận tốc khi ngược dòng là 6 km/h. Hỏi vận tốc canô lúc xuôi và lúc ngược dòng.

Dạng 3: Toán làm chung công việc

- Bài 1.** Hai đội cùng đào một con mương. Nếu mỗi đội làm một mình cả con mương thì thời gian tổng cộng hai đội phải làm là 25 giờ. Nếu hai đội cùng làm chung thì công việc hoàn thành trong 6 giờ. Tính xem mỗi đội làm một mình xong cả con mương trong bao lâu?
- Bài 2.** Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai người chỉ làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi một người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong?
- Bài 3.** Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút sẽ đầy bể. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?
- Bài 4.** Nếu vòi A chảy 2 giờ và vòi B chảy trong 3 giờ thì được $\frac{4}{5}$ hồ. Nếu vòi A chảy trong 3 giờ và vòi B chảy trong 1 giờ 30 phút thì được $\frac{1}{2}$ hồ. Hỏi nếu chảy một mình mỗi vòi chảy trong bao lâu mới đầy hồ (giả thiết hồ ban đầu không có nước).
- Bài 5.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi II cần nhiều thời gian hơn vòi I là 5 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

Dạng 4: Toán có nội dung hình học

- Bài 1.** Một đa giác lồi có tất cả 170 đường chéo. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?
- Bài 2.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 280 m. Người ta làm lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng 2 m. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là $4256 m^2$.
- Bài 3.** Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài lên 10 m, tăng chiều rộng lên 5 m thì diện tích tăng $500 m^2$. Nếu giảm chiều dài 15 m và giảm chiều rộng 9 m thì diện tích giảm $600 m^2$. Tính chiều dài, chiều rộng ban đầu.
- Bài 4.** Cho một tam giác vuông. Nếu tăng các cạnh góc vuông lên 2 cm và 3 cm thì diện tích tam giác tăng $50 cm^2$. Nếu giảm cả hai cạnh đi 2 cm thì diện tích sẽ giảm đi $32 cm^2$. Tính hai cạnh góc vuông.

Dạng 5: Các Dạng khác

- Bài 1.** Trong một phòng có 80 người họp, được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu bớt đi hai dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm hai người mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu người ngồi?
- Bài 2.** Một phòng học có một số dãy ghế tổng cộng 40 chỗ ngồi. Do phải xếp 55 chỗ nên người ta kê thêm 1 dãy ghế và mỗi dãy ghế thêm 1 chỗ. Hỏi lúc đầu trong phòng có mấy dãy ghế?
- Bài 3.** Trong tháng giêng hai tổ sản xuất được 720 chi tiết máy. Trong tháng hai, tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 12% nên sản xuất được 819 chi tiết máy. Tính xem trong tháng giêng

mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Bài 4. Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2%, còn tỉnh B tăng 1,1%. Tổng số dân của cả hai tỉnh năm nay là 4.045.000 người. Tính số dân của mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay?

V. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI(*)

Dạng 1: Hệ bậc hai giải bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số

- Từ phương trình bậc nhất rút một ẩn theo ẩn kia.
- Thế vào phương trình bậc hai để đưa về phương trình bậc hai một ẩn.
- Số nghiệm của hệ tùy theo số nghiệm của phương trình bậc hai này.

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - xy = 24 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ 3x + 4y = 84 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x + y) - 9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y + x^2 = 4x \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x^2 - y^2 + 2y = 4 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2(x + y)^2 - 3(x + y) - 5 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5(x - y)^2 + 3(x - y) = 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + xy + 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ (x - 2)(y - 3) = 18 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x(x - 8) + 3y(y + 1) = -6 \\ 2x(x - 8) + 5y(y + 1) = -14 \end{cases}$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2xy - x^2 + 4x = -4 \\ x^2 - 2xy + y - 5x = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 2xy - 11 = 0 \\ xy + y - x = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy + x - y = 1 \\ xy - 3x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} xy + 2x - y - 2 = 0 \\ xy - 3x + 2y = 0 \end{cases}$

Dạng 2: Hệ đối xứng loại 1

Hệ có Dạng: $(I) \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ (với $f(x, y) = f(y, x)$ và $g(x, y) = g(y, x)$).

(Có nghĩa là khi ta hoán vị giữa x và y thì $f(x, y)$ và $g(x, y)$ không thay đổi).

- Đặt $S = x + y$, $P = xy$.
- Đưa hệ phương trình (I) về hệ (II) với các ẩn là S và P .
- Giải hệ (II) ta tìm được S và P .
- Tìm nghiệm (x, y) bằng cách giải phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 - xy - 2(x + y) = -3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 6 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases} \end{array}$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} xy + x + y = 19 \\ x^2y + xy^2 = 84 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 8 \\ x(x + 1) + y(y + 1) + xy = 17 \end{cases} \end{array}$$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x + y)(xy - 1) = 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y) \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} (x - y)^2 - (x - y) = 6 \\ 5(x^2 + y^2) = 5xy \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases} \end{array}$$

Dạng 3: Hệ đối xứng loại 2

Hệ có Dạng: $(I) \begin{cases} f(x, y) = 0 & (1) \\ f(y, x) = 0 & (2) \end{cases}$

(Có nghĩa là khi hoán vị giữa x và y thì (1) biến thành (2) và ngược lại).

• Trừ (1) và (2) về theo về ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 & (3) \\ f(x, y) = 0 & (1) \end{cases}$$

• Biến đổi (3) về phương trình tích:

$$(3) \Leftrightarrow (x - y) \cdot g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

• Như vậy,

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x = y \\ f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

• Giải các hệ trên ta tìm được nghiệm của hệ (I).

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ xy^2 + 2 = x^2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ y^2 + 1 = 3x \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x^3 = 7x + 3y \\ y^3 = 7y + 3x \end{cases}$$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 3y = 4 \frac{y}{x} \\ y - 3x = 4 \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$.

- Tìm m để phương trình 2 có nghiệm trái dấu.
- Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .
- Chứng minh biểu thức $M = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc vào m .

Bài 2. Tìm m để phương trình:

- $x^2 - x + 2(m-1) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.
- $4x^2 + 2x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.
- $(m^2 + 1)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 - (a-1)x - a^2 + a - 2 = 0$.

- Chứng minh rằng với mọi a , phương trình trên có 2 nghiệm trái dấu.
- Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2 . Tìm giá trị của a để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 4. Cho phương trình: $x^2 + 4x + m + 1 = 0$.

- Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm.
- Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Bài 5. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$.

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .
- Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 mà không phụ thuộc vào m .
- Tìm giá trị của m để biểu thức $A = 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung:

a) $\begin{cases} 2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0 \\ 4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + mx + 1 = 0 \\ x^2 + x + m = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^2 + (3m+1)x - 9 = 0 \\ 6x^2 + (7m-1)x - 19 = 0 \end{cases}$

Bài 7. Cho parabol (P): $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng (d): $y = x + m$.

- Vẽ parabol (P).
- Xác định m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.
- Xác định phương trình đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) và cắt (P) tại điểm có tung độ bằng -4.

Bài 8. Cho parabol (P): $y = -\frac{x^2}{4}$ và điểm M (1; -2).

- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M và có hệ số góc là m .
- Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B khi m thay đổi.
- Gọi x_A, x_B lần lượt là hoành độ của A và B. Xác định m để $x_A^2x_B + x_Ax_B^2$ đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị đó.

Bài 9. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ b) $x(x^2 - 1)(x + 2) + 1 = 0$ c) $\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} = \frac{10}{3} \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right)$
d) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$ e) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$ f) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12 = 0$
g) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$ h)

Bài 10. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2}{x+3} - \frac{x+2}{3x-x^2} = \frac{10}{x(x^2-9)}$ b) $\frac{5}{x-1} - \frac{4}{3-6x+3x^2} = 3$

Bài 11. Hai ô tô cùng khởi hành một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 160 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của mỗi ô tô biết rằng nếu ô tô đi từ A tăng vận tốc thêm 10 km/h sẽ bằng hai lần vận tốc ô tô đi từ B.

Bài 12. Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 9km/h. Khi đi từ B về A người ấy đi đường khác dài hơn 6 km, với vận tốc 12km/h, nên thời gian ít hơn thời gian khi đi là 20 phút. Tính quãng đường AB?

Bài 13. Hai ca nô cùng khởi hành từ hai bến A, B cách nhau 85 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 1 giờ 40 phút. Tính vận tốc riêng của mỗi ca nô biết rằng vận tốc của ca nô xuôi

dòng lớn hơn vận tốc của ca nô ngược dòng là 9 km/h (có cả vận tốc dòng nước) và vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Bài 14. Có hai thùng đựng dầu. Thùng thứ nhất có 120 lít, thùng thứ hai có 90 lít. Sau khi lấy ra ở thùng thứ nhất một lượng dầu gấp ba lượng dầu lấy ra ở thùng thứ hai, thì lượng dầu còn lại trong thùng thứ hai gấp đôi lượng dầu còn lại trong thùng thứ nhất. Hỏi đã lấy ra bao nhiêu lít dầu ở mỗi thùng?

Bài 15. Hai trường A, B có 250 HS lớp 9 dự thi vào lớp 10, kết quả có 210 HS đã trúng tuyển. Tính riêng tỉ lệ đỗ thì trường A đạt 80%, trường B đạt 90%. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu HS lớp 9 dự thi vào lớp 10.

Bài 16. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước sau 2 giờ 55 phút thì đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất cần ít thời gian hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể.

Bài 17. Hai tổ cùng làm chung một công việc hoàn thành sau 15 giờ. Nếu tổ một làm trong 5 giờ, tổ hai làm trong 3 giờ thì được 30% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ hoàn thành trong bao lâu.