SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi có 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho biểu thức $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ với $-1\le x\le 1$.

Tính giá trị của biểu thức P khi $x=-\frac{1}{2017}$.

b) Cho a, b, c là ba số thực không âm thoả mãn $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$.

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

Câu 2 (2,0 điểm). a) Giải phương trình: $2x^2-2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+(y+1)^2=xy+x+1 \\ 2x^3=x+y+1 \end{cases}$

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn: $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương.

Câu 4 (3,0 điểm).

1) Cho tam giác nhọn *ABC* (*AB*<*AC*) nội tiếp đường tròn (*O*,*R*). Các đường cao *AD*, *BE*, *CF* cắt nhau tại *H* (*D* thuộc *BC*, *E* thuộc *CA*, *F* thuộc *AB*). Tia *EF* cắt tia *CB* tại *P*, *AP* cắt đường tròn (*O*,*R*) tại *M* (*M* khác *A*).

a) Chứng minh rằng: *PE.PF = PM.PA* và *AM* vuông góc với *HM*.

b) Cho cạnh *BC* cố định, điểm *A* di chuyển trên cung lớn *BC*. Xác định vị trí của *A* để diện tích Δ *BHC* đạt giá trị lớn nhất.

2) Cho tam giác *ABC* có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn tâm *O*. Một điểm *I* chuyển động trên cung *BC* không chứa điểm *A* (*I* không trùng với *B* và *C*). Đường thẳng vuông góc với *IB* tại *I* cắt đường thẳng *AC* tại *E*, đường thẳng vuông góc với *IC* tại *I* cắt đường thẳng *AB* tại *F*. Chứng minh rằng đường thẳng *EF* luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}+\frac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}+\frac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}\le 3$.

**************_**Hết**_**************

Họ và tên thí sinh:………………………………………………Số báo danh:……………………….

Chữ kí giám thị 1:……………………………….Chữ kí giám thị 2:……………………………….

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho biểu thức $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ với $-1\le x\le 1$.

Tính giá trị của biểu thức P khi $x=-\dfrac{1}{2017}$.

b) Cho $a,\ b,\ c$ là ba số thực không âm thoả mãn $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{a}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{b}}{1+b}+\dfrac{\sqrt{c}}{1+c}=\dfrac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

Bài làm

a. $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

$P=\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$(vì $-1\le x\le 1$).

Lúc đó suy ra $P^2=(1-x)\left(2+2\sqrt{1-(1-x^2)}\right)=2(1-x)(1+|x|)$.

Mà $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}\ge 0$ .Nên từ đó ta suy ra $P=\sqrt{2}(1-x)$ (vì $1-x\ge 0$) .Vì $x=-\dfrac{1}{2017}<0$ nên suy ra $P=\dfrac{2018}{2017}\sqrt{2}$.

b. Đặt $x=\sqrt{a};y=\sqrt{b};z=\sqrt{c}\Rightarrow xy+yz+xz=1\Rightarrow a+1=(x+y)(x+z)$.

Tương tự ta có $b+1=(z+y)(x+y);c+1=(z+x)(z+y)$ .Nên lúc đó ta có :

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{2(xy+yz+xz)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}=VP$$

Câu 2 (2,0 điểm). a) Giải phương trình: $2x^2-2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+(y+1)^2=xy+x+1\\2x^3=x+y+1\end{cases}$

Bài làm

a. $2x^2-2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)\Leftrightarrow(x^2-x+2)+x^2-x-1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)(1)$.

Đặt $t=\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)\Rightarrow x^2-x+2=(t+1)^2$.Thay vào phương trình (1) ta có :

$$(t-x)(t-x+1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=x\\t=x-1\end{array}\right.$$

Với $t=x\Rightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2-x-2=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Với $t=x-1\Rightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2-x-2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Vậy nghiệm phương trình là $x=\frac{1}{3}; x=2$.

b. $\begin{cases} x^2+(y+1)^2=xy+x+1 \\ 2x^3=x+y+1 \end{cases}$ (I) .Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y+1)^2-x(y+1)=1 \\ 2x^3=x+y+1 \end{cases}$ (II).

Đặt t= y+1 ta có hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2-xt=1 \\ 2x^3=(x+t)(x^2+t^2-xt) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2-xt=1 \\ x=t \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=t=1 \\ x=t=-1 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm hệ là (1;0);(-1;-2).

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn: $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương.

Bài làm

a. Ta có $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7 \Leftrightarrow (x-2y)(2x-y+3)=-7$.

Xét tất cả trường hợp ta có nguyên (x;y) là (3;2);(-5;-6);(-7;-4);(1;4).

b. $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương.

Lúc đó suy ra $\sqrt{n^2+2n+18}$ là số tự nhiên .

Đặt $\sqrt{n^2+2n+18}=k(k\in\mathbb{N})$ .Ta có $\sqrt{n^2+2n+18}=k(k\in\mathbb{N}) \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1)=17$ .Vì k,n đều là tự nhiên và $k+n+1>k-n-1$ nên ta xét trường hợp sau : $\begin{cases} k+n+1=17 \\ k-n-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=9 \\ n=7 \end{cases}$.Lúc đó

$n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9=81=9^2$.Vậy n = 7 thỏa đề .

Câu 4 (3,0 điểm).

1) Cho tam giác nhọn *ABC* (*AB*<*AC*) nội tiếp đường tròn (*O*,*R*). Các đường cao *AD*, *BE*, *CF* cắt nhau tại *H* (*D* thuộc *BC*, *E* thuộc *CA*, *F* thuộc *AB*). Tia *EF* cắt tia *CB* tại *P*, *AP* cắt đường tròn (*O*,*R*) tại *M* (*M* khác *A*).

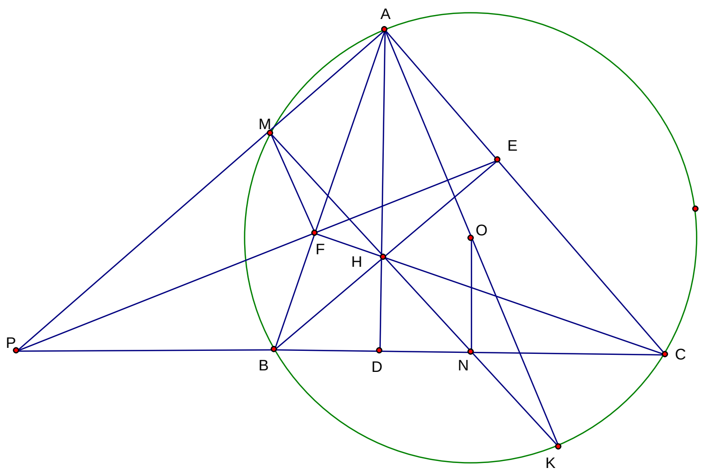
a) Chứng minh rằng: *PE.PF = PM.PA* và *AM* vuông góc với *HM*.

b) Cho cạnh *BC* cố định, điểm *A* di chuyển trên cung lớn *BC*. Xác định vị trí của *A* để diện tích Δ *BHC* đạt giá trị lớn nhất.

2) Cho tam giác *ABC* có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn tâm *O*. Một điểm *I* chuyển động trên cung *BC* không chứa điểm *A* (*I* không trùng với *B* và *C*). Đường thẳng vuông góc với *IB* tại *I* cắt đường thẳng *AC* tại *E*, đường thẳng vuông góc với *IC* tại *I* cắt đường thẳng *AB* tại *F*. Chứng minh rằng đường thẳng *EF* luôn đi qua một điểm cố định.

Bài làm

4.1a.



Do BE ,CF là đường cao của tam giác ABC nên $BFC = BEC = 90^0$.

Nên tứ giác BFEC nội tiếp suy ra $PBF = PEC$.

Từ đó có tam giác PBF đồng dạng với PEC suy ra $\frac{\text{PB}}{\text{PE}} = \frac{\text{PF}}{\text{PC}} \Rightarrow \text{PE.PF} = \text{PB.PC}$ (1).

Tứ giác AMBC nội tiếp suy ra $PBM = PAC$.

Từ đó có tam giác PBM đồng dạng với PAC suy ra $\frac{\text{PB}}{\text{PE}} = \frac{\text{PM}}{\text{PC}} \Rightarrow \text{PB.PC} = \text{PM.PA}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra PE.PF=PM.PA .

Ta có PE.PF=PM.PA suy ra $\frac{\text{PE}}{\text{PM}} = \frac{\text{PA}}{\text{PF}}$. Ta có tam giác PMF đồng dạng với tam giác PEA.Lúc đó suy ra $PMF = PEA$ .Ta có tứ giác AMFE nội tiếp (3).Do $AHE = AFH = 90^0$ nên suy ra tứ giác AEHF nội tiếp (4).Từ (3) và (4) suy ra 5 điểm A,M,F,H,E cùng thuộc 1 đường tròn đường kính AH .Suy ra $AMH = 90^0 \Rightarrow AM \perp HM$.

4.1b.Kẻ đường kính AK của đường tròn (O).Gọi N là trung điểm cạnh BC .Chứng minh được tứ giác BHCK là hình bình hành .Mà N là trung điểm của BC nên N là trung điểm của HK.

Suy ra ON là đường trung bình của tam giác KAH hay AH=2.ON.

Ta có tam giác OBC cân tại O suy ra ON là đường trung tuyến ,cũng là đường cao ,phân giác .Lúc đó có $NOC = \frac{1}{2} BOC = \alpha$ (không đổi vì 3 điểm B,O,C cố định).

Do đó $S_{BHC} = \frac{1}{2}.BC.HD = \frac{1}{2} BC(AD - AH) \le \frac{1}{2} BC(AN - 2.ON)$ .Hay suy ra

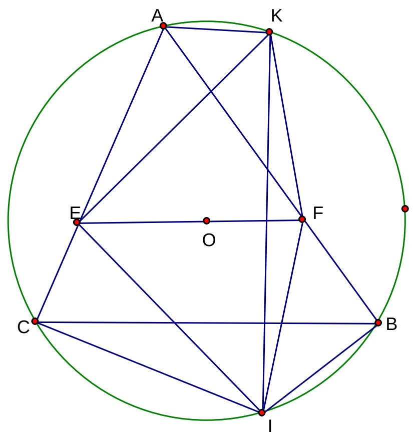
$S_{BHC} \le \frac{1}{2}BC(AN-2.ON) \le \frac{1}{2}BC(AO+ON-2.ON) = \frac{1}{2}BC.(AO-ON)$.

Tiếp tục ta suy ra $S_{BHC} \le \frac{1}{2}.BC(R-R\cos\alpha)=\frac{1}{2}R.BC(1-\cos\alpha)$ (không đổi).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi D trùng với N và ba điểm A,O,N thẳng hàng .

Khi đó A là điểm chính giữa cung lớn BC .Vậy khi A là điểm chính giữa cung lớn BC thì diện tích Δ BHC đạt giá trị lớn nhất.

4.2 .



Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF .

Xét trường hợp điểm K trùng với điểm A .Khi đó KI là dây cung của (O).Mà EF là đường trung trực của KI suy ra EF đi qua O .

Xét trường hợp điểm K không trùng với A .Ta có $CIF + BIE = 180^0 \Rightarrow EIF + BIC = 180^0$

Do có tứ giác ABIC nội tiếp nên suy ra $BAC + BIC = 180^0$ .Từ đó ta có $BAC = EIF \Rightarrow EAF = EIF$

Mà $EKF = EIF$ (do I và K đối xứng nhau qua EF).Ta suy ra $EKF = EAF$ hay bốn điểm A,K,E,F cùng thuộc một đường tròn .

Khi đó ta thu được hoặc tứ giác AKEF nội tiếp hoặc tứ giác AKFE nội tiếp .Không mất tính tổng quát ,ta giả sử AKFE nội tiếp .Ta suy ra $KAF = KEF$ (cùng chắn cung KF) suy ra $KAB = KEF$ (1).

Mà $IEF = KEF$ (do I và K đối xứng nhau qua EF) (2) . Mặt khác $IEF = BIK$ (cùng phụ với góc KIE (3).Từ (1) ,(2) và (3) ta suy ra $KAB = BIK$ .Suy ra AKBI nội tiếp suy ra K nằm trên (O).Khi đó KI là dây cung của (O).Mà EF là đường trung trực của KI nên suy ra E,O,F thẳng hàng .Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}+\dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}+\dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}\le 3$.

Bài làm

Đặt vế trái của (1) là M .Ta có

$$6a^2+8ab+11b^2=(2a+3b)^2+2(a-b)^2\ge(2a+3b)^2\Rightarrow\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}\le\frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b}.$$

Tiếp tục ta chứng minh $\dfrac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b}\le\dfrac{3a+2b}{5}\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Tương tự ta có $\dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}\le\dfrac{3b+2c}{5};\dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}\le\dfrac{3c+2a}{5}$.

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có $M\le\dfrac{3b+2c}{5}+\dfrac{3a+2b}{5}+\dfrac{3c+2a}{5}=a+b+c$.

Mà ta có $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\le a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(c^2+a^2)+(b^2+c^2)$.

Hay $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)=9\Rightarrow a+b+c\le 3$.Vậy $M\le 3$,dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$